Tilting for preprojective algebras and reduced words

木村雄太
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1 導入

多元環の表現論とは, 与えられた多元環上の加群圏や導来圏, 更に一般に三角圏の構造を明らかにすることである. ここで多元環とは, 体 k 上の (有限次元) k-代数のことである. 特に本研究では, 非輪状な箙 (quiver, クイバー) から得られる前射影多元環 (preprojective algebra) と, それにより構成される三角圏を扱う. 前射影多元環は数学の様々な分野に現れるが, 特に近年では Fomin-Zelevinsky [FZ] によって導入された団多元環 (cluster algebra) の加法的圏化と呼ばれる操作において重要な役割を持っており, 盛んに研究されている.

団多元環の圏化には団傾対象 (cluster tilting object) と呼ばれる対象を持つ, 2-カラビ-ヤウ (2-Calabi-Yau, 2-CY) 圏と呼ばれる三角圏が用いられる. ここで 2-CY 圏とは, 2 シフト [2] がセール関手となっている三角圏のことである. 団多元環の圏化を一言で言うと, 2-CY 圏の団傾対象を団多元環の団 (cluster) に対応させる写像を構成することである.

団多元環の圏化に加え, Iyama による高次元 Auslander 対応も背景として, 団傾対象をもつ 2-CY 圏の研究が近年盛んに行われている. 現在では, いくつもの研究によって団傾対象を持つ 2-CY 圏が構成されている (cf. [A, BIRS, BMRRT, GLS]). 本レポートで扱う前射影多元環は特に [BIRS, GLS] で中心的な役割を担っている. [A] において Amiot は, 大域次元 2 以下の有限次元多元環に対して, その有界導来圏を用いることで 2-CY 圏を構成した. また, Buan-Iyama-Reiten-Scott らが構成した 2-CY 圏は, Amiot の構成による 2-CY 圏に含まれることが [ART] で証明された.

本研究は [ART] で行われた 2-CY 圏間の圏同値の構成を, 導来圏の視点から捕らえたものである. Amiot によると, 2-CY 圏は導来圏を用いて構成されるが, [ART] で行われた 2-CY 圏間の圏同値は, 導来圏の段階で成立することが示される.

2 前射影多元環とコクセター群

この節では [BIRS] の結果を説明する. はじめにクイバーを使った多元環の構成を説明し, 前射影多元環を定義する. このレポートを通して k を代数閉体とする.

クイバー Q とは, 2 つの集合 Q_0, Q_1, 及び写像 $s, t : Q_1 \to Q_0$ の四つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ のことをいう. このとき Q_0 は頂点の集合, Q_1 は矢の集合と呼び, それぞれの元を Q の頂点, 矢と呼ぶ. 矢の列 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l), \alpha_i \in Q_1$ で $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ を満たすものを, Q の長さ l の道という. 道 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ を $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ と表す. また, Q の頂点を長さ 0 の道と見なし, $e_u, u \in Q_0$ と表す. クイバーは次のようにグラフで表すことができる.

例 2.1. $Q_0 = \{1, 2\}, Q_1 = \{\alpha, \beta\}, s(\alpha) = s(\beta) = 1, t(\alpha) = t(\beta) = 2$ のとき, $Q =(1 \rightrightarrows 2)$ と表せら

れる.

定義 2.2. クイバー Q に対して, 道多元環 kQ を次のように定義する. kQ は k 線形空間として Q の道全体を基底に持ち, 2 つの道 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$, $\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ に対して, その積 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ を, もし $t(\alpha_l)=s(\beta_1)$ ならば道 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$, もし $t(\alpha_l)\neq s(\beta_1)$ ならば 0 として, これを線形に拡張する.

各 $u\in Q_0$ に対して, $e_u\in kQ$ は $e_u^2=e_u$ を満たす. Q_0 が有限集合のとき, $\Sigma_{u\in Q_0}e_u$ は kQ の積に関する単位元である. Q_0, Q_1 がともに有限集合のとき, Q を有限クイバーという. Q の長さ 1 以上の道 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$ で, $t(\alpha_l)=s(\alpha_1)$ を満たすものを Q のサイクルと言う. サイクルを持たないクイバーを, 非輪状という. Q が非輪状有限クイバーのとき, kQ は k 上有限次元多元環である.

以下このレポートを通して Q を非輪状有限クイバーとする. $\overline{Q}$ で Q のダブルクイバーとする. 即ち, $\overline{Q}_0:=Q_0$ かつ $\overline{Q}_1:=Q_1\sqcup\{\,\alpha^*:v\to u\mid\alpha:u\to v\in Q_1\,\}$. $x\in k\overline{Q}$ に対して, x で生成される $k\overline{Q}$ の両側イデアルを $\langle x\rangle$ と表す.

定義 2.3. 次で定義される多元環 Π を, Q の前射影多元環という.

$$\Pi:=k\overline{Q}/\langle\sum_{\alpha\in Q_1}\alpha\alpha^*-\alpha^*\alpha\rangle.$$

一般に Π は k 上有限次元ではない. 以下のように Π の両側イデアルで商を取ることにより, 有限次元多元環を得る. 両側イデアルを構成するために, クイバー Q を用いてコクセター群を定義する.

定義 2.4.

(1) 次の生成元と関係式で定義される群 W_Q を Q のコクセター群 (Coxeter group) という. 生成元 : $\{\,s_u\mid u\in Q_0\,\}$, 関係式 : $s_us_u=1$, もし u と v の間に Q において矢がなければ $s_us_v=s_vs_u$, もし u と v の間に Q において矢がちょうど 1 本あれば $s_us_vs_u=s_vs_us_v$.

(2) $w\in W_Q$ の表示 $s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ が既約 (reduced) とは, l が w の任意の表示 $s_{v_1}s_{v_2}\cdots s_{v_m}$ に対して $l\leq m$ を満たすときをいう.

前射影多元環 Π の両側イデアルを次のように定義する. 各 $u\in Q_0$ に対して,

$$I_u:=\Pi(1-e_u)\Pi,$$

ここで e_u は $e_u\in k\overline{Q}$ が代表する Π の元である. 次に $s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を $w\in W_Q$ の既約表示とするとき,

$$I_w:=I_{u_1}I_{u_2}\cdots I_{u_l}$$

とする. [BIRS] により, I_w は w の既約表示によらずに定まることがわかる. そこで $w\in W_Q$ に対して, 前射影多元環の商多元環を次で定める.

$$\Pi_w:=\Pi/I_w.$$

k 上の多元環 A に対して, $\operatorname{mod}A$ で有限生成左 A-加群のなす圏を表す. 特に断らない限り, 加群といえば有限生成左加群とする. A-加群 M に対し, $\operatorname{add}M$ で M の有限直和の直和因子のなす $\operatorname{mod}A$ の充満部分圏を表す. 有限次元多元環 A に対して, 自由 A-加群の部分加群全体のなす $\operatorname{mod}A$ の充満部分圏を $\operatorname{Sub}A$ と表す. Buan-Iyama-Reiten-Scott らは次を示した.

命題 2.5. [BIRS] $w\in W_Q$ とする. 次が成立する.

(a) Π_w は k 上有限次元多元環である.

(b) $\mathsf{Sub}\,\Pi_w$ は安定 2-CY フロベニウス圏である．即ち安定圏 $\underline{\mathsf{Sub}}\,\Pi_w$ は 2-CY 圏である．

(c) $s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を w の既約表示とする．$i \in \{1,2,\dots,l\}$ に対して，$M^i := (\Pi/I_{u_1\cdots u_i})e_{u_i}$，$M := \bigoplus_{i=1}^{l} M^i$ とする．このとき，$M \in \mathsf{Sub}\,\Pi_w$ であり，M は $\underline{\mathsf{Sub}}\,\Pi_w$ の団傾対象である．即ち，次の等式が成立する．

$$\begin{aligned}\mathsf{add}\,M &= \{\, X \in \mathsf{Sub}\,\Pi_w \mid \mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(X, M) = 0 \,\} \\ &= \{\, X \in \mathsf{Sub}\,\Pi_w \mid \mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(M, X) = 0 \,\}.\end{aligned}$$

この節の最後に本研究で扱う三角圏を定義する．道多元環 $k\overline{Q}$ および前射影多元環 Π は次のように次数付き多元環とみなすことができる．即ち，$\beta \in \overline{Q}_1$ に対して，

$$\deg(\beta) = \begin{cases} 1 & \beta = \alpha^*,\ \alpha \in Q_1, \\ 0 & \beta = \alpha,\ \alpha \in Q_1, \end{cases}$$

とする．この時，任意の $w \in W_Q$ に対して Π_w も次数付き多元環となることがわかる．$\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ で有限生成次数付き Π_w-加群のなす圏を表す．また，次数付き自由 Π_w-加群の部分加群全体の成す $\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ の充満部分圏を $\mathsf{Sub}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ と表す．命題 2.5 と同様に，$\mathsf{Sub}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ はフロベニウス圏となる．本研究は安定圏 $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ で行われる．我々の目的は三角圏 $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ を多元環の導来圏として表すことである．

3 三角圏の傾対象

我々の目的は三角圏 $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ を多元環の導来圏として表すことである．一般に三角圏の間の同値を構成する際に，次の概念が重要である．$\mathcal{T}$ を三角圏，$X \in \mathcal{T}$ とする．$\mathsf{thick}\,X$ で，X を含み直和因子で閉じる $\mathcal{T}$ の最小の部分三角圏を表す．

定義 3.1. $\mathcal{T}$ を三角圏とし，$X \in \mathcal{T}$ とする．

(1) 任意の $i > 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X[i]) = 0$ を満たし，かつ $\mathsf{thick}\,X = \mathcal{T}$ となるとき，X を $\mathcal{T}$ の準傾対象 (silting object) という．

(2) X は準傾対象であり，かつ任意の $i < 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X[i]) = 0$ を満たすとき，$\mathcal{T}$ の傾対象 (tilting object) であるという．

傾対象を持つ三角圏について適当な仮定のもとで次が証明されている．k-線形圏 $\mathcal{C}$ は各 $X \in \mathcal{C}$ に対して，任意の冪等元 $e : X \to X$ が核を持つ時，冪等完備と呼ばれる．多元環 A に対して $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ で有限生成射影的 A-加群による有界ホモトピー圏を表す．

定理 3.2. [Ke94] $\mathcal{T}$ をフロベニウス圏の安定圏であって，冪等完備とする．もし傾対象 $X \in \mathcal{T}$ が存在すれば，三角圏同値 $\mathcal{T} \simeq \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(X))$ が存在する．

$\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ は冪等完備である．一般に $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ は準傾対象を持つことがわかる．準傾対象の候補は，命題 2.5 (c) に現れた団傾対象である．即ち，$\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を w の既約表示とする．$i \in \{1,2,\dots,l\}$ に対して，

$$M(\mathbf{w})^i := (\Pi/I_{u_1\cdots u_i})e_{u_i} \quad M(\mathbf{w}) := \bigoplus_{i=1}^{l} M(\mathbf{w})^i.$$

定理 3.3. [Ki] 任意の $w \in W_Q$ の任意の既約表示 $\mathbf{w}$ に対して，$M(\mathbf{w})$ は $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ の準傾対象である．

次に $M(\mathbf{w})$ が傾対象になるための $\mathbf{w}$ の十分条件を与える．$\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とする．簡単のため, 以降では $Q_0 = \{\, u_1, u_2, \ldots, u_l \,\}$ とする．各 $u \in Q_0$ に対して, 次を考える．

$$p_u = \max\{1 \leq j \leq l \mid u_j = u\}, \quad m_u = \min\{1 \leq j \leq l \mid u_j = u\}.$$

$\mathbf{w}$ に対して次の定義をする．Q の任意の矢 $u \to v$ に対して, $p_u < p_v$ が成立しているとき, $\mathbf{w}$ を c-ending であるという．また Q の任意の矢 $u \to v$ に対して, $m_u < m_v$ が成立しているとき, $\mathbf{w}$ は c-starting であるという．

例 3.4. Q を次のクイバーとする: $\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[rr] & & 3 \end{tikzcd}$．このとき既約表示 $\mathbf{w} = s_3s_2s_1s_3s_2s_3$ は c-ending である．実際, $p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 6$ であり, 条件を満たしていることが確認できる．また, 例えば既約表示 $\mathbf{w}' = s_1s_2s_1s_3$ は c-starting であることが分かる．

次の定理が成立する． 有限次元多元環 A に対して, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ で $\operatorname{\mathsf{mod}} A$ の有界導来圏を表す． 任意の $X \in \underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ に対して, X の自己準同型環は k 上有限次元であることに注意しておく．

定理 3.5. [Ki] $\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とする．もし $\mathbf{w}$ が *c-ending* または *c-starting* のとき, 次が成立する．

(a) $M(\mathbf{w})$ は $\mathcal{T} := \underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ の傾対象である．
(b) $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M(\mathbf{w}))$ の大域次元は 2 以下である．
(c) 三角圏の同値 $\Phi : \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M(\mathbf{w})))$ が存在する．

定理 3.5 (c) は (a), (b) および定理 3.2 の帰結である．

4 2-Calabi-Yau 圏との関係

この節では 2-CY 圏と $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ の関係を見る．まずは Amiot による 2-CY 圏の構成を確認する．A を有限次元多元環で大域次元が 2 以下であるとする．このとき, A の有界導来圏 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ はセール関手 $\mathbb{S} := \mathrm{D}A \otimes^{\mathbb{L}}_A -$ を持つ, ここで $\mathrm{D} = \mathrm{Hom}_k(-, k)$ である．$\mathbb{S}_2 := \mathbb{S} \circ [-2]$ とおく．このとき A の団圏 $\mathcal{C}_A$ は, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ の $\mathbb{S}_2$ による軌道圏 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A)/\mathbb{S}_2$ の [Ke05] の意味での triangulated hull を取ることにより得られる．詳しい定義は省略する．構成から, 次の三角圏の関手が得られる．

$$\pi_A : \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A)/\mathbb{S}_2 \to \mathcal{C}_A.$$

Amiot-Reiten-Todorov らは次のことを証明した．

定理 4.1. [ART] 任意の $w \in W_Q$ に対してある大域次元 2 以下の有限次元多元環 A_w が存在して, 三角圏の同値 $G : \underline{\mathsf{Sub}}\,\Pi_w \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{A_w}$ が存在する．

定理 3.5 および定理 4.1 を用いて, 我々は次の定理を得る．

定理 4.2. [Ki] $\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とする．$\mathcal{T} = \underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ とおく．もし $\mathbf{w}$ が *c-ending* のとき, 次が成立する．

(a) $A_w \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(M(\mathbf{w}))$.

(b) 次の三角圏の関手の可換図式が成立する.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(A_w) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_{A_w}"] & \underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\Pi_w \arrow[d, "\mathrm{Forget}"] \\ \mathsf{C}_{A_w} \arrow[r, "G"] & \underline{\mathsf{Sub}}\,\Pi_w. \end{tikzcd}$$

以上により, Amiot-Reiten-Todorov らによる同値 G は定理 3.5 の同値から従うことがわかった. 最後に以下のことに注意をする: 一般に, 任意の $w \in W_Q$ に対して w の既約表示であって c-ending であるものが存在するとは限らない. しかしクイバー Q の矢の向きを変更することによって, 定理 4.2 の可換図式を得ることができる. 即ち, Q' を Q の幾つかの矢の向きを入れ替えて得られるクイバーとする. このとき $W_Q \simeq W_{Q'}$ が成立する. 今 Q が非輪状なので, 任意の $w \in W_Q$ に対して w の $W_{Q'}$ の元としての既約表示が c-ending となるようなクイバー Q' が取れる. このときクイバー Q' に対して定理を適用することで, 可換図式が得られる. Q, Q' それぞれから得られる多元環を Π_w, Π'_w と書いたとき, 一般に $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi_w$ と $\underline{\mathsf{Sub}}^{\mathbb{Z}}\,\Pi'_w$ は同値にはならないことを注意しておく.

参考文献

[A] C. Amiot, *Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 59 (2009), no. 6, 2525-2590.

[ART] C. Amiot, I. Reiten, G. Todorov, *The ubiquity of the generalized cluster categories*, Adv. Math. 226 (2011), no. 4, 3813-3849.

[BIRS] A. Buan, O. Iyama, I. Reiten, J. Scott, *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups*, Compos. Math. 145 (2009), no. 4, 1035-1079.

[BMRRT] A. Buan, R. Marsh, I. Reiten, M. Reineke, G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. Math. 204 (2006), no. 2, 572-618.

[FZ] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster Algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15, no. 2 (2002), 497-529.

[GLS] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer, *Rigid modules over preprojective algebras*, Invent. Math. 165 (2006), no. 3, 589-632.

[Ke94] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. Ècole Norm. Sup. (4) 27 (1994), no. 1, 63-102.

[Ke05] B. Keller, *On triangulated orbit categories*, Doc. Math. 10 (2005), 551-581.

[Ki] Y. Kimura, *Tilting and cluster tilting for preprojective algebras and Coxeter groups*, arXiv: 1607.00637.