# principal nilpotent tuples に付随する超幾何系とその合流操作について

武田裕康 *

北海道大学大学院理学院数学専攻

2017 年 1 月 23 日

この講演は北海道大学の斎藤睦氏との共同研究に基づくものである。

## 1 Introduction

ここでは本講演の結果の背景となる先行研究について紹介する.

### 1.1 Gauss の超幾何関数と合流操作

Gauss の超幾何関数

$$F(a,b,c;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m m!}x^m$$

は次の微分方程式

$$\left(x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+(c-(a+b+1)x)\frac{d}{dx}-ab\right)F=0 \tag{1}$$

を満たす. ただし、$c$ は負の整数でないとし、

$$(a)_m=\begin{cases} a(a-1)\cdots(a-m+1) & (m\geq 1)\\ 1 & (m=0)\end{cases}$$

とする. また、Gauss の超幾何関数は次の積分表示を持つ.

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt \tag{2}$$

* tkd.i-0-u@math.sci.hokudai.ac.jp

さて、先ほどの微分方程式 (1) に対して、

$$x = \epsilon\xi,\ b = \frac{1}{\epsilon}$$

とおくと、微分方程式は

$$\left(\xi(1-\epsilon\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + (c-(a+\frac{1}{\epsilon}+1)\epsilon\xi)\frac{d}{d\xi} - a\right)F = 0 \tag{3}$$

となる。これを $\epsilon \to 0$ としたもの

$$\left(\xi\frac{d^2}{d\xi^2} + (c-\xi)\frac{d}{d\xi} - a\right)F = 0 \tag{4}$$

は Kummer の合流超幾何関数 ${}_1F_1(a,c;x)$ が満たす微分方程式と一致する．Kummer の合流超幾何関数は

$${}_1F_1(a,c;x) = C_1\int_0^1 e^{xt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}dt \tag{5}$$

という積分表示を持つが、この積分部分は (2) の積分部分に対して

$$x = \epsilon\xi,\ b = \frac{1}{\epsilon}$$

として

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-\epsilon\xi t)^{-1/\epsilon}dt \to \int_0^1 e^{\xi t}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}dt \tag{6}$$

という極限操作をすると得られる．これらの極限操作は合流と呼ばれている．

合流の由来は微分方程式 (1) の特異点の合流から来ている．微分方程式 (1) の特異点は $\{0,1,\infty\}$ で、いずれも確定型特異点である．一方、微分方程式 (4) の特異点は $\{0,\infty\}$ となる．このうち $\infty$ は不確定型特異点となる．これは微分方程式 (1) を変形して得られた (3) の特異点 $\{0,\frac{1}{\epsilon},\infty\}$ に対して、$\epsilon \to 0$ と極限操作すると $\frac{1}{\epsilon} \to \infty$ となり、二つの確定型特異点 $\frac{1}{\epsilon},\infty$ が「合流」して不確定型特異点になった、ということである．

さて、Gauss の超幾何関数や Kummer の合流超幾何関数は一変数の「特殊関数」と呼ばれているものである．一変数特殊関数には他にも Bessel 関数 $J_a(x)$、Hermite-Weber 関数 $H_a(x)$、Airy 関数 $\mathrm{Ai}(x)$ というものがある．これらの関数は上で説明したのと同様な極限操作を繰り返すことで Gauss の超幾何関数から得られることが知られている．しかし、Kummer の合流超幾何関数から Hermite-Weber 関数を得るときは特異点の合流が起きているが、それ以外の極限操作では特異点の合流は起きていない．そこで、これらの極限操作を統一できる「特異点の合流」以外の見方はないだろうか、という問題が浮かび上がる．

## 1.2　木村ー高野の一般超幾何関数

これに対する解答を与えたのが木村-高野 [6] による一般超幾何関数とその合流操作である．まず、Gauss の超幾何微分方程式の一般化として青本 [1] と Gelfand[3] が独立して青本-Gelfand 系と呼ばれる微分方程式系を定義した．また Gelfand-Retahk-Serganova[4] は Airy 関数の一般化である一般型 Airy 関数を定義した．これらの先行研究の下、木村-高野は一般超幾何関数を定義した．

$n, m \in \mathbb{Z}_{>0},\ m < n$ として

$$Z_{m,n} = \{Z \in M_{n,m} | \mathrm{rank} Z = m\}$$

とおく．$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ に対して、$b \in \mathfrak{g}$ が regular element であるとは、$b$ の中心化代数 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(b)$ が

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(b)) = n$$

を満たすことである．全ての regular element $b$ はある $n$ の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ と $g_b \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して

$$b = (Ad(g_b))(b_1 I_{\lambda_1} + \Lambda_{\lambda_1}) \oplus \cdots b_s I_{\lambda_s} + \Lambda_{\lambda_s})$$

(ただし $\Lambda_r = \sum_{i=1}^{s-1} E_{i+1,i}$) で表される．

**Definition 1.1**　regular element $b$ に対して、$Z_{m,n}$ 上の一般超幾何関数とは次の微分方程式系の解である．

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_{i_1,j_1}} \frac{\partial}{\partial z_{i_2,j_2}} - \frac{\partial}{\partial z_{i_1,j_2}} \frac{\partial}{\partial z_{i_2,j_1}}\right)\Phi = 0 \quad (1 \le i_1, i_2 \le n;\ 1 \le j_1, j_2 \le m) \tag{7}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} z_{i,j_1} \frac{\partial}{\partial z_{i,j_2}} + \delta_{j_1 j_2}\right)\Phi = 0 \quad (1 \le j_1, j_2 \le m) \tag{8}$$

$$(\mathrm{Tr}(zX\partial^t) - \langle \alpha, X \rangle)\Phi = 0 \quad (X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(b)) \tag{9}$$

ただし、$\alpha \in (\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(b)^*)$ は $\langle \alpha, I_n \rangle = -m$ を満たすものとする．

特に regular element が semisimple であるときには青本-Gelfand 系と、nilpotent であるときには一般 Airy 系となる．また、$n = 4, m = 2$ のとき、4 の分割は

$$(1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1), (4)$$

の 5 つあるが、各分割に対応する regular element に付随する一般超幾何関数はそれぞれ Gauss の超幾何関数、Kummer の合流超幾何関数、Bessel 関数、Hermite-Weber 関数、Airy 関数と一致する.

$n$ の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ に対して、$B_\lambda$ を重複度 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ で相異なる固有値 $b_1, \ldots, b_s$ を持つ regular element の集合とする. このとき隣接する $n$ の分割 $\lambda$, $\mu$ に対して次が成り立つ.

Theorem 1.2 (1) $b \in B_\mu$ を一つとる. $\epsilon > 0$ に対して $\sigma_\epsilon(b) \in B_\lambda$ が取れて

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sigma_\epsilon(b) = b$$

が成り立つ.

(2) 上の $\sigma_\epsilon(b) \in B_\lambda$ に対して、リー代数の同型 $\Psi_\epsilon : \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(b) \to \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\sigma_\epsilon(b))$ が取れて

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Psi_\epsilon(X) = X$$

が任意の $X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(b)$ で成り立つ.

特に $b \in B_\mu$ の固有値がすべてこのリー代数の極限操作によって、一般超幾何系、及びその解の被積分関数が合流する. つまり、超幾何関数の合流とは「regular element の中心化代数の極限操作」によって説明される、というのが木村-高野の結果であった.

## 1.3 principal nilpotent pair

ところで、一般超幾何関数は regular element の中心化代数 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(b)$ によって定義されていた. regular semisimple element の中心化代数 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(b)$ は Cartan subalgebra であることから、一般超幾何関数の合流操作は Cartan subalgebra の極限操作に対応している. ところで、Cartan subalgebra の極限によって得られる部分代数は $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(b)$ だけなのだろうか?答えは否である. このような部分代数の例として、Ginzburg[5] が導入した principal nilpotent pair の中心化代数がある.

Definition 1.3 $(e_1, e_2) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ が次を満たすとき、$(e_1, e_2)$ を principal nilpotent pair と呼ぶ.

(1) 任意の $(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ に対してある $g \in G$ が存在して、$(t_1 e_1, t_2 e_2) = (\mathrm{Ad}(g) e_1, \mathrm{Ad}(g) e_2)$

(2) $[e_i, e_j] = 0 \qquad (i, j = 1, 2)$

(3) $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(e_1, e_2) := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(e_1) \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(e_2)$ に対して、$\dim(\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(e_1, e_2)) = n$

注意として、(1) は $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra とすると、「ある $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$ が存在して $[h_i, e_j] = \delta_{ij} e_j$ $(i, j = 1, 2)$ が成り立つ」ことと同値である．このような $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$ を associated semisimple pair という．$(e_1, e_2)$ が principal nilpotent pair であるとき、associated semisimple pair $h_1, h_2$ に対して

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h_1, h_2) = \mathfrak{h}$$

が成り立つ．また、principal nilpotent pair は Young 図形と対応していることが知られている．なお、他の古典型リー代数に対しては Elashvili-Panyushev[2] と R. Yu[8] で特徴づけされている．次の命題から principal nilpotent pair の中心化代数は Cartan subalgebra の極限から得られることが分かる．

Proposition 1.4 $(e_1, e_2)$ を principal nilpotent pair、$(h_1, h_2)$ を associated semisimple pair としたとき、次が成り立つ．

$$\lim_{t \to \infty} (\operatorname{Ad} \exp t(e_1 + e_2)) \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h_1, h_2) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(e_1, e_2)$$

それでは、この principal nilpotent pair に対応する超幾何系とはどのようなものであろうか？今回の主結果はこの問題を principal nilpotent tuples という拡張した形で考えたものである．

# 2 主結果

ここでは principal nipotent tuples を導入したあと、principal nipotent tuples に付随する超幾何系を定義する． さらに超幾何系の解の積分表示を示した後、これが青本-Gelfand 系の解の積分表示の極限操作によって得られることを紹介する．

## 2.1 principal nilpotent tuples

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra とする．

Definition 2.1 $\mathfrak{g}$ の $p$ 個の元の組 $(e_1, \ldots, e_p)$ が次の条件を満たすとき、*principal nilpotent $p$-tuple* という．

1. ある $h_1, \ldots, h_p \in \mathfrak{h}$ が存在して $[h_i, e_j] = \delta_{ij} e_j \qquad (1 \leq i, j \leq p)$ が成り立つ
2. $[e_i, e_j] = 0 \qquad (1 \leq i, j \leq p)$
3. $\mathfrak{a} := \langle e^{\boldsymbol{l}} \mid \boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^p \rangle$ に対して $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, $\dim \mathfrak{a} = n$ が成り立つ．

ただし、$\boldsymbol{l} = (l_1, \dots, l_p) \in \mathbb{N}^p$ に対して $e^{\boldsymbol{l}} = \prod_{i=1}^p e_i^{l_i}$ とする． $h_1, \dots, h_p \in \mathfrak{h}$ は $(e_1, \dots, e_p)$ の associated semisimple tuples で

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h_1, \dots, h_p) := \cap_{i=1}^p \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h_i) = \mathfrak{h}$$

が成り立つ．上の条件から $e_i$ は nilpotent であり,

$$[h_i, e^{\boldsymbol{l}}] = l_i e^{\boldsymbol{l}}$$

が成り立つ．また

$$L := \{\boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^p \,|\, e^{\boldsymbol{l}} \neq 0\}.$$

とすると $\{e^{\boldsymbol{l}} \,|\, \boldsymbol{l} \in L\}$ は $\mathfrak{a}$ の生成系である．

Example 2.2　$p = 1$ とする．このとき $e = \Lambda_n$ は principal nilpotent 1-tuple であり、

$$h = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n-3}{2} & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{n-1}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$$

は $[h, e] = e$ を満たす．

この例から、principal nilpotent tuple は regular nilpotent element の一般化となることがわかる．

次の命題が示すように、$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ は Cartan subalgebra の極限によって得られる．

Proposition 2.3　$\boldsymbol{e} := \exp(\frac{\tau-1}{\tau}(e_1 + \cdots + e_p))$ とする．このとき、次が成り立つ．

1. $\lim_{\tau \to 0} \mathrm{Ad}(\boldsymbol{e}(\tau))(\tau h)^M = e^M$ for all $M \in \mathbb{N}^p$.
2. $\lim_{\tau \to 0} \mathrm{Ad}(\boldsymbol{e}(\tau))\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$.

## 2.2　超幾何系とその解の積分表示

$A \subset \mathbb{C}^p$, $|A| = n$ に対して $V = \bigoplus_{\boldsymbol{a} \in A} \mathbb{C}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}$ を

$$h_i \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}} = a_i \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}}, e^{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a}} = v_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{l}} for \boldsymbol{l} \in L$$

となるように定める．すると、$(e_1, \dots, e_p)$ が principal であることからある $\boldsymbol{a}(0) \in A$ が存在して $A = \boldsymbol{a}(0) + L$ か $A = a(0) - L$ が成り立つ．これ以降は $A = \boldsymbol{a}(0) + L$ として話を進める．

Example 2.4 Example 2.2 の場合 $A = \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$ とすると $v_i = \boldsymbol{e}_{i+1}$ $(i = 0,1,2,3)$ は上の条件を満たす.

$B \subset A$ を $|B| = m$ となるようにとり、$V_B = \bigoplus_{\boldsymbol{a}\in B} \mathbb{C}\boldsymbol{v_a}$ とする. $G = GL(V)$ とし、$N = \{g \in G | g_{|_{V_B}} = id_{V_B}\}$, $Z = G/N$ と定義する. $Z$ は $\{z = (z_{\boldsymbol{a},j})_{\boldsymbol{a}\in A, 1\le j\le m} | \mathrm{rank} z = m\}$ と表せる.

$\mathfrak{g}$ を $G$ のリー代数とすると、$a \in \mathfrak{g}$ に対して

$$(\partial_a(f))(z) := \frac{d}{dt} f(\exp(-ta)z)|_{t=0}$$

と定義する.

Definition 2.5 principal nilpotent $p$-tuple $(e_1, \ldots, e_p)$, $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して、$(e_1, \ldots, e_p)$ に付随する超幾何系を次の $Z$ 上の微分方程式系で定義する.

$$(\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},j_1}} \frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{b},j_2}} - \frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},j_2}} \frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{b},j_1}})\Phi = 0 \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A;\ 1 \le j_1, j_2 \le m) \tag{10}$$

$$(\sum_{\boldsymbol{a}\in A} z_{\boldsymbol{a},j_1} \frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},j_2}} + \delta_{j_1 j_2})\Phi = 0 \quad (1 \le j_1, j_2 \le m) \tag{11}$$

$$(\sum_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{l}\in A} \sum_{j=1}^{m} z_{\boldsymbol{a},j} \frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{l},j}} + \alpha(e^{\boldsymbol{l}}))\Phi = 0 \quad (\boldsymbol{l} \in L) \tag{12}$$

最後の方程式 (12) は $\partial_{e^{\boldsymbol{l}}} - \alpha(e^{\boldsymbol{l}})$ に対応する.

この超幾何系の解 $\Phi$ に対する積分表示を考える. $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^p$ に対して、多項式 $\theta_{\boldsymbol{k}}$ を [4] に倣って

$$\sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{N}^p} b_{\boldsymbol{l}} T^{\boldsymbol{l}} = \exp(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^p\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \theta_{\boldsymbol{k}}(b) T^{\boldsymbol{k}}), \tag{13}$$

(ただし $b_{\boldsymbol{0}} = 1$) と定義する.

Proposition 2.6 $\boldsymbol{l} \in L$ に対して、$b_{\boldsymbol{l}} = \sum_{j=1}^{m} z_{\boldsymbol{a}(0)+\boldsymbol{l},j} t_j$、$b'_{\boldsymbol{l}} := b_{\boldsymbol{l}}/b_{\boldsymbol{0}}$ とし、

$$\phi(\alpha, z, t) := b_{\boldsymbol{0}}^{\alpha_{\boldsymbol{0}}} \exp(\sum_{\boldsymbol{k}\in L_+} \alpha_{\boldsymbol{k}} \theta_{\boldsymbol{k}}(b')), \tag{14}$$

とおく. ただし $L_+ = L \setminus \{\boldsymbol{0}\}$、$\boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^p$ に対して $\alpha_{\boldsymbol{l}} = \alpha(e^{\boldsymbol{l}})$ とする. このとき、

$$\Phi(\alpha, z) := \int \phi(\alpha, z, t) dt$$

は $(e_1, \ldots, e_p)$ に付随する超幾何系の解となる.

Example 2.7　$p=1$ のとき、$\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}$ に対して、多項式 $\theta_k$ は [6] で定義されたものになる．このとき $(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{C}^n,\ \alpha_o=-m$ に対して

$$\Phi(\alpha,z)=\int b_0^{\alpha_0}\exp(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\theta_k(b'))dt$$

は [4] で定義された一般 Airy 関数の積分表示となる．

## 2.3　合流操作

$\mathfrak{h}=\langle h^{\boldsymbol{l}}\rangle$ に対して、$\alpha\in\mathfrak{h}^*$ を $\alpha(E_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=\alpha_{\boldsymbol{a}}$ $(\boldsymbol{a}\in A)$ とすると

$$(\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},i}}\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{b},j}}-\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},j}}\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{b},i}})\Phi=0\quad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in A;\ 1\le i,j\le m)\tag{15}$$

$$(\sum_{\boldsymbol{a}\in A}z_{\boldsymbol{a},i}\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},j}}+\delta_{ij})\Phi=0\quad(1\le i,j\le m)\tag{16}$$

$$(\sum_{k=1}^{m}z_{\boldsymbol{a},k}\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},k}}-\alpha_{\boldsymbol{a}})\Phi=0\quad(\boldsymbol{a}\in A).\tag{17}$$

は青本-Gelfand 系と一致する．$\alpha_{\boldsymbol{l}}=\sum_{\boldsymbol{a}\in A}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{l}}\alpha_{\boldsymbol{a}}$. とすると、(17) は

$$(\sum_{\boldsymbol{a}\in A}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{l}}\sum_{k=1}^{m}z_{\boldsymbol{a},k}\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},k}}-\alpha_{\boldsymbol{l}})\Phi=0\quad(\boldsymbol{l}\in L),\tag{18}$$

と同値になる．この方程式は $(\partial_{h^{\boldsymbol{l}}}+\alpha_{\boldsymbol{l}})\Phi=0$ と一致する．この超幾何系の解の被積分関数から (14) を得るようために以下の極限操作をする．

$L_{\boldsymbol{e}(\tau)}$ を $Z=G/N$ に $\boldsymbol{e}(\tau)$ を左から掛ける作用とする．

Proposition 2.8　$[\beta^{\boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{a}}]$ を $[\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{l}}]_{\boldsymbol{a}\in A,\boldsymbol{l}\in L}$ の逆行列、

$$\phi_\tau(\alpha,z)=\prod_{\boldsymbol{l}\in L}(\prod_{\boldsymbol{a}\in A}(L_{\boldsymbol{e}(\tau)}.b_{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}(0)})^{\beta^{\boldsymbol{l}}_{\boldsymbol{a}}})^{\alpha_{\boldsymbol{l}}/\tau^{\boldsymbol{l}}}.$$

とする．このとき、

$$\int\phi_\tau(\alpha,z)\,dt$$

は

$$
\begin{aligned}
&(\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},i}}\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{b},j}}-\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},j}}\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{b},i}})\Phi=0 \quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in A;\, i,j\in B)\\
&(\sum_{\boldsymbol{a}\in A} z_{\boldsymbol{a},i}\frac{\partial}{\partial z_{\boldsymbol{a},j}}+\delta_{ij})\Phi=0 \quad (i,j\in B)\\
&(\partial_{\mathrm{Ad}(\boldsymbol{e}(\tau))h^{\boldsymbol{l}}}+\frac{\alpha_{\boldsymbol{l}}}{\tau^{\boldsymbol{l}}})\Phi=0 \quad (\boldsymbol{l}\in L)
\end{aligned}
$$

の解である．ただし、$\alpha_{\boldsymbol{0}}=-m$ とする．

この解の被積分関数を定数倍した次の関数

$$
\varphi_\tau(\alpha,z):=(\frac{\tau}{1-\tau})^{\sum_{\boldsymbol{a}\in A}\alpha_{\boldsymbol{a}}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}(0)|}\prod_{\boldsymbol{a}\in A}((\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}(0))!)^{\alpha_{\boldsymbol{a}}}\phi_\tau(\alpha,z).
$$

に対して、$\int\varphi_\tau(\alpha,z)dt$ も上の微分方程式系の解となる．次の定理がこの講演における主結果である．

Theorem 2.9　$\tau\to 0$ としたとき、

$$
\varphi_\tau(\alpha,z)\to b_{\boldsymbol{0}}^{-m}\exp(\sum_{\boldsymbol{l}\in L}\alpha_{\boldsymbol{l}}\theta_{\boldsymbol{l}}(b'))=\phi(\alpha,z,t)
$$

が成り立つ．

Remark 2.10　Example 2.2 の場合で考えると Theorem 2.9 は青本-Gelfand 系の解から一般 Airy 関数への直接的な合流操作を表している．

# 参考文献


[1] K. Aomoto, Les équations aux différences linéarires et les intégrales des fonctions multiformes, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 22 (1975) 271–297.

[2] A. G. Elashvili and D. Panyushev, A classification of the principal nilpotent pairs in simple Lie algebras and related problems, J. London Math. Soc. (2) 63 (2001) 299–318.

[3] I. M. Gel'fand, General theory of hypergeometric functions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 288 (1986) 14–18; Soviet Math. Dokl. (English translation), 33 (1987) 9–13.

[4] I. M. Gel'fand, V. S. Retahk and V. V. Serganova, Generalized Airy functions, Schubert cells and Jordan groups, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 298 (1988) 17–21; Soviet Math. Dokl. (English translation), 37 (1988) 8–12.

[5] V. Ginzburg, Principal nilpotent pairs in a semisimple Lie algebra I, Invent. Math. 140 (2000) 511–561.

[6] H. Kimura, K. Takano, On confluences of general hypergeometric systems, Tohoku Math. J. 58 (2006) 1–31.

[7] M. Saito, H. Takeda, Confluent hypergeometric systems associated to principal nilpotent tuples, to appear.

[8] R. Yu, Centralizers of distinguished nilpotent pairs and related problems, J. Algebra 252 (2002) 167–194.