代数多様体の自己有理写像の力学次数と算術次数

東京大学大学院数理科学研究科　松澤陽介 *(Yohsuke Matsuzawa)

1　イントロダクション

標数 0 の代数閉体 k 上の滑らかな射影多様体 X と，X から X 自身への支配的有理写像 $f\colon X \dashrightarrow X$ を考える．有理写像 f を合成したもの $f^n = f \circ \cdots \circ f$ の漸近的振る舞いを測る量として力学次数 δ_f というものがある．これは f が射で $k = \mathbb{C}$ の場合は位相的エントロピーと深い関係のある量で，離散力学系 $f\colon X \dashrightarrow X$ の幾何学的な複雑さを表す不変量である．

一方，$k = \overline{\mathbb{Q}}$ の場合は，点 $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ のオービット $\{f^n(P) \mid n \geq 0\}$ の数論的な複雑さを測る量として算術次数 $\alpha_f(P)$ と呼ばれるものがある．

P が Zarsiki 稠密な軌道を持つ場合その算術次数と f の力学次数が一致するという予想がある ([5, 2])．

Conjecture 1.1 (Kawaguchi-Silverman)**.** $f\colon X \dashrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の自己有理写像とする．$P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ を f-軌道が定義できる点とする．この時，算術次数 $\alpha_f(P)$ が定義できて ($\alpha_f(P)$ を定義する極限が収束して)，さらに P の f-軌道が X で Zariski 稠密なら

$$\alpha_f(P) = \delta_f.$$

力学次数や算術次数の定義を簡単に説明した後，この予想に関連して得た幾つかの結果について解説する．

2　力学次数

この節では，k は標数 0 の代数閉体とする．k 上の n 次元の滑らかな射影多様体 X に対して，その余次元 p の既約部分多様体の形式和のなす自由アーベル群を $Z^p(X)$ とかく．この時，交点数を取るペアリング $Z^p(X) \times Z^{n-p}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ が定まる．余次元 p の数値的に 0 なサイクルのなす部分加群を $\mathrm{Num}^p X = \{\alpha \in Z^p(X) \mid$ 任意の $\beta \in Z^{n-p}(X)$ に対して $(\alpha \cdot \beta) = 0\}$ とかき，$N^p(X) = Z^p(X)/\mathrm{Num}^p X$ と定める．これは有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群になっていることが知られている．支配的有理写像 $f\colon X \dashrightarrow X$ に対して，引き戻し写像 $f^*\colon N^p(X) \longrightarrow N^p(X)$ を定義したい．f の不確定点解消

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

をとる．ここで，p は双有理射で Y は滑らかな射影多様体，g は射で $f \circ p = g$．この時，サイクルクラス $\alpha \in N^p(X)$ に対して $f^*\alpha = p_* g^* \alpha$ と定める．この $f^*\alpha$ が不確定点解消の取り方によらないことは簡単に示

* myohsuke@ms.u-tokyo.ac.jp

せる．

Definition 2.1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(N^p(X)_{\mathbb{R}}, N^p(X)_{\mathbb{R}})$ 上のノルム $||\ ||$ を一つ固定する．ここで $N^p(X)_{\mathbb{R}} = N^p(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ は有限次元線形空間．極限

$$\lim_{m\to\infty} ||((f^m)^*\colon N^p(X)_{\mathbb{R}} \longrightarrow N^p(X)_{\mathbb{R}})||^{1/m}$$

は存在することが知られている．その値は明らかにノルムの取り方によらない．これを f の p 次力学次数といい $\lambda_p(f)$ とかく．特に $\lambda_1(f) = \delta_f$ とかく．

任意の豊富因子 H に対して $\lambda_p(f) = \lim_{m\to\infty}((f^m)^*H^p\cdot H^{n-p})^{1/m}$ となることが知られている．また，$\lambda_p(f)$ は双有理不変量となっている．つまり可換図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] & X \arrow[d, dashed, "\pi"] \\
X' \arrow[r, dashed, "f'"'] & X'
\end{tikzcd}$$

において π が双有理なら $\lambda_p(f) = \lambda_p(f')$.

力学次数と位相的エントロピーには次のような関係があることが知られている．

Theorem 2.2 (Gromov, Yomdin)**.** $k = \mathbb{C}$ で f が射のとき，$h_{top}(f)$ で $f\colon X \longrightarrow X$ の複素位相についての位相的エントロピーを表す．このとき

$$h_{top}(f) = \max_{0\le p\le n}\{\log \lambda_p(f)\}.$$

定義から位相的エントロピーは 0 以上であり，力学次数は 1 以上である．力学次数が 1 より真に大きい自己写像が力学系的な観点から見て面白いものだと考えられている．どのような代数多様体がそのような自己写像を持つかは現在多く研究されている．

3 Weil 高さ関数と算術次数

代数体上の代数多様体の力学系 $f\colon X \dashrightarrow X$ に対しては，点が f で写像されていく際にいかにその点の数論的複雑さが増大していくかを考えたい．そのために Weil 高さ関数について簡単に説明する．

Definition 3.1. 関数 $h\colon \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める．$P = [x_0 : \cdots : x_N] \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して，$x_i \in K$ となる代数体 $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ をとる．$\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする．$\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ を 0 ではない素イデアルとするとき，$\mathfrak{p}$ に付随する絶対値を $||x||_{\mathfrak{p}} = |\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}|^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}$ と定める．ただし $v_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ での離散付値．このとき

$$h(P) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\left(\sum_{\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_K}\max_{0\le i\le N}\{\log||x_i||_{\mathfrak{p}}\} + \sum_{\sigma\colon K\to\mathbb{C}}\max_{0\le i\le N}\{\log|\sigma(x_i)|\}\right)$$

と定める．これは K の取り方や，斉次座標 $x_0,\ldots,x_N$ の取り方によらないことが示される．この h を対数的 Weil 高さ関数という．

例えば，$x_0,\ldots,x_N$ が全て整数で最大公約数が 1 のとき $h([x_0:\cdots:x_N]) = \max_{0\le i\le N}\{\log|x_i|\}$ となる．

次に射影多様体 X の上の因子に付随する高さ関数を定義する．D を X 上の $\mathbb{R}$-因子とし，関数 $h_D\colon X \longrightarrow X$ を次のように定める．まず $D = \sum_i a_i H_i$, H_i は非常に豊富な因子, a_i は実数, と表す．そして $\Phi_{|H_i|}\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ を H_i による埋め込みとし，

$$h_{H_i} = h \circ \Phi_{|H_i|}\colon X(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

とする．このとき $h_D = \sum_i a_i h_{H_i}$ と定める．これは表示 $D = \sum_i a_i H_i$ の取り方によらず，有界関数の差を除いて一意的に定まる．

高さ関数は点の数論的な複雑さを表す関数で，例えば Mordell-Weil の定理 (アーベル多様体の有理点が有限生成アーベル群であるという定理) の証明などで中心的な役割を果たす．

高さ関数の最も基本的な性質として次の Northcott の有限性定理がある．

Theorem 3.2. K を代数体 (有理数体の有限次拡大) とする．X を K 上の射影多様体 (完備でも良い) とし，H を X 上の豊富因子とする．H に付随する高さ関数 h_H を任意に固定する．このとき $d \geq 1, B \geq 0$ に対して

$$\{P \in X(\overline{K}) \mid [K(P) : K] \leq d, h_H(P) \leq B\}$$

は有限集合である．ただし，$K(P)$ は $\overline{K}$-valued point $P\colon \operatorname{Spec} \overline{K} \longrightarrow X$ の像の剰余体．

さて，この高さ関数を用いて算術次数を定義する．

Definition 3.3 (Kawaguchi-Silverman). X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影多様体とし，X 上のある豊富因子に付随する高さ関数 h_X を一つ固定する．高さ関数は有界関数の差を除いてしか決まらないので $h_X \geq 1$ となるようにとっておく．$f\colon X \dashrightarrow X$ を支配的自己有理写像とする．

1. $X_f = \{P \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \mid$ 任意の $m \geq 0$ に対して $f^m(P)$ は f の不確定点に属さない $\}$ と定める．f-軌道が定義できる点とは X_f の元のことである．
2. $P \in X_f$ に対して

$$\overline{\alpha}_f(P) = \limsup_{m\to\infty} h_X(f^m(P))^{1/m}$$
$$\underline{\alpha}_f(P) = \liminf_{m\to\infty} h_X(f^m(P))^{1/m}$$

と定め，これらをそれぞれ上算術次数，下算術次数と呼ぶ．これらが一致するときその値を $\alpha_f(P)$ と書き，f の P での算術次数と呼ぶ．上 (下) 算術次数は豊富因子に付随する高さ関数 h_X の取り方に依存しない．

算術次数は軌道上の有理点の高さの意味での分布を測る一つの尺度である．

Proposition 3.4 (Kawaguchi-Silverman). $P \in X_f$ を f-軌道が無限集合になる点とする．さらに $\alpha_f(P)$ が存在するとする ($\overline{\alpha}_f(P) = \underline{\alpha}_f(P)$ ということ)．このとき

$$\lim_{B\to\infty} \frac{\#\{f^m(P) \mid m \geq 0, h_X(f^m(P)) \leq B\}}{\log B} = \frac{1}{\log \alpha_f(P)}$$

算術次数と力学次数についてイントロダクションで述べた予想をここまでで準備した記号を用いて改めて述べておく．

Conjecture 3.5 (Kawaguchi-Silverman)**.** X, f は上の通りとする．

1. $P \in X_f$ に対して $\overline{\alpha}_f(P) = \underline{\alpha}_f(P)$.
2. $P \in X_f$ の f-軌道 $\{f^m(P) \mid m \geq 0\}$ が X で Zariski 稠密ならば
$$\alpha_f(P) = \delta_f.$$

この予想が証明されている代表的な例として次の二つを挙げておく (他にも幾つか重要な場合があるがそれについては [1] を参照).

1. X がアーベル多様体のとき．
2. X が曲面で f が自己同型のとき．

また f が射の場合は予想の 1. の算術次数の存在は証明されている [3].

4 主定理

まず最も基本的な事実として次のことを証明した [4].

Theorem 4.1. $f \colon X \dashrightarrow X$ を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影多様体の支配的自己有理写像とする．このとき任意の $P \in X_f$ に対して
$$\overline{\alpha}_f(P) \leq \delta_f.$$
より詳しく次が成り立つ．豊富因子に付随する高さ関数 h_X を固定し，$h_X^+ = \max\{h_X, 1\}$ とおく．任意の $\epsilon > 0$ に対してある定数 $C > 0$ が存在して
$$h_X^+(f^m(P)) \leq C(\delta_f + \epsilon)^m h_X^+(P)$$
が任意の $P \in X_f$ と $m \geq 0$ に対して成立する．

つまり算術次数は常に力学次数で上から評価されるのである．したがって Zariski 稠密な軌道を持つ点 P に対しては，$\underline{\alpha}_f(P) \geq \delta_f$ を証明すれば $\alpha_f(P)$ の存在と $\overline{\alpha}_f(P) = \delta_f$ が証明できるということになる．

そこで例えば次の極限を考えてみる．
$$\hat{h}(P) = \lim_{m \to \infty} \frac{h_X(f^m(P))}{\delta_f^m}$$
この極限は一般には発散することも振動することもある．しかしもしこれが正の値に収束したとすると (下極限が正で十分)，$\underline{\alpha}_f(P) \geq \delta_f$ となることがわかる．したがって $\hat{h}(P) = 0$ ならば P の f-軌道が Zariski 稠密でないことが示せれば良いということになる．この $\hat{h}$ のことを (あるいは良い性質を持つように少しアレンジしたものを) 力学系 $f \colon X \dashrightarrow X$ の標準高さ関数と呼ぶ．(ここではラフに書いているが標準高さは h_X をとるときに用いた豊富因子に依存している．) 良い性質を持つ標準高さ関数を構成することは非常に重要だと考えられている．Mordell-Weil の定理の証明で用いられる Neron-Tate 高さは今の意味での標準高さの一種だとみなすことができる．(力学系 $[n] \colon A \longrightarrow A$ と対称豊富因子についての標準高さである．)

標準高さについて次の事を証明した．

Theorem 4.2. あるネフ $\mathbb{R}$-因子 D が存在して $f^*D \equiv \delta_f D$ となるとする．($\equiv$ は数値同値を表す．) さらに $\delta_f > 1$ とする．D に付随する高さ関数 h_D を固定する．任意の $P \in X_f$ を固定する．もし $h_D(f^m(P))/\delta_f^m$

が $m \to \infty$ のとき下に有界であれば極限

$$\lim_{m\to\infty} \frac{h_D(f^m(P))}{\delta_f^m}$$

は存在する．

Remark 4.3. この定理の仮定の D の存在と下への有界生の仮定であるが，例えば X のピカール数が 1 の場合は f が代数安定 (任意の $m \geq 0$ に対して $(f^m)^* = (f^*)^m \colon N^1(X) \longrightarrow N^1(X)$ ということ) であればよい．また曲面の場合はあらゆる自己双有理写像がブローアップによる共役により仮定にあるような D を持つようにできることが知られている．

曲面の自己同型については川口氏によりすでに予想は証明されていたが，同型とは限らない自己射に対しては最近佐野，柴田との共同研究で証明を得ることができた．

Theorem 4.4 (Matsuzawa-Sano-Shibata)**.** 曲面の同型ではない自己全射に対て *Conjecture 3.5* は正しい．さらに，算術次数が力学次数に一致する点が必ず存在する．

この定理の後半についてであるが，Zariski 稠密な軌道が存在しない場合があるので算術次数が力学次数に一致する点があるのかという問いは予想とは独立である．この問題も現在のところ未解決である．

今まで全て代数体上で議論してきたが，実は Weil 高さ関数を定義することができる体というのは他にもある．例えば関数体がその代表例である．非可算な標数 0 の体を係数体とする一変数代数関数体上では算術次数が力学次数に一致する点が存在することを証明した．

Theorem 4.5 (Matsuzawa-Sano-Shibata)**.** k を標数 0 の非可算代数閉体とする．$f\colon X \dashrightarrow X$ を $\overline{k(t)}$ 上の滑らかな射影多様体の支配的自己有理写像とする．このとき部分集合 $S \subset X(\overline{k(t)})$ で次を満たすものが存在する．

1. S は X で *Zariski* 稠密．
2. $P, Q \in S$ を相異なる元とすると P の f-軌道と Q の f-軌道は交わらない．
3. $P \in S$ に対して $\alpha_f(P) = \delta_f$.

参考文献

[1] S. Kawaguchi, J. H. Silverman, Examples of dynamical degree equals arithmetic degree, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 41–63.

[2] S. Kawaguchi, J. H. Silverman, On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties, J. Reine Angew. Math. **713** (2016), 21–48.

[3] S. Kawaguchi, J. H. Silverman, Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on Abelian varieties, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 368. no. 7, (2016), 5009–5035.

[4] Y. Matsuzawa, On upper bounds of arithmetic degrees, arXiv:1606.00598v1.

[5] J. H. Silverman, Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014) 647–678.