素数と平方数の和について

鈴木雄太 (YUTA SUZUKI)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科 博士後期課程 1 年

Abstract. 「十分大きい自然数は平方数であるか素数と平方数の和であろう」という Hardy-Littlewood の予想がある．この問題に関して, 自然数 N を素数と平方数の和で書き表す表し方の個数の短区間 $X \le N \le X+H$ 上での平均を考える．最近, Languasco and Zaccagnini (2016) は大体 $X^{0.5} \le H \le X^{1-\varepsilon}$ の下で, この平均の漸近式を得た．この成立範囲を $X^{0.337} \le H \le X^{1-\varepsilon}$ にまで広げることに成功したので報告する．

1. 序

1923 年, Hardy-Littlewood [3, Hypothesis H] は

「十分大きい自然数は平方数であるか素数と平方数の和でかけるであろう」

と予想した．この予想は今日 "Hardy-Littlewood 予想" と呼ぶもののひとつであるが, やはり未解決である．この問題に対して, 表現関数

$$R(N) = \sum_{m+n^2=N} \Lambda(m)$$

を考える．ただしここで

$$\Lambda(m) = \begin{cases} \log p & (m = p^k \text{ が素べきのとき}), \\ 0 & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

は von Mangoldt 関数である．すると, 形式的に circle method を用いることで,

$$R(N) = \mathfrak{S}_2(N) N^{\frac{1}{2}} + (\text{Error}), \quad N \to \infty,\ N \ne M^2 \tag{1}$$

という漸近式の成立が予想できる．ただしここで特異級数 $\mathfrak{S}_2(N)$ は

$$\mathfrak{S}_2(N) = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{(N/p)}{p-1}\right), \quad \left(\frac{N}{p}\right) : \text{Legendre 記号}$$

で与えられる．漸近式 (1) 自体を示すのは現在の技術では非常に難しいように思えるが, 実は平均的には漸近式 (1) が成立するということが知られている．この結果は Miech [9] による：

Theorem A (Miech [9])**.** 実数 $X, A \ge 2$ に対して, 漸近式

$$R(N) = \mathfrak{S}_2(N) N^{\frac{1}{2}} + O(N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-A})$$

が高々$\ll XL^{-A}$ 個の例外を除きすべての自然数 $N \le X$ に対して成立する．ただし以後, $L = \log X$ とし, implicit constants は定数 A のみに依存する．

さて, この問題を短区間

$$X < N \le X + H$$

で考えよう．すると, Miech の結果は短区間の場合でもおおよそ $X^{\frac{1}{2}} \le H \le X$ であれば成立することが三河 [10] や Perelli and Pintz [12] によって示されている．

Theorem B (三河 [10], Perelli and Pintz [12])**.** 実数 $X, H, A \geq 2$ と $\varepsilon > 0$ に対して,

$$X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq H \leq X \tag{2}$$

ならば, 漸近式

$$R(N) = \mathfrak{S}_2(N)N^{\frac{1}{2}} + O(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-A})$$

が高々$\ll HL^{-A}$ 個の例外を除きすべての自然数 $X < N \leq X + H$ に対して成立する. ただし implicit constants は定数 A, ε のみに依存する.

上記 Theorem B で必要とされる条件 (2) は現在でも改善されていない. 実は, 他の類似した加法的問題たちに対しても同様の現象が見られている. 例えば, 素数と k 乗数の和に対する問題では条件

$$H^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon} \leq H \leq X$$

が今のところ最良の記録 (Perelli and Zaccagnini [13]) であるし, 素数と素数の k 乗数の和に対しても同じ条件のもとでしか結果が得られていない (筆者 [15]).

これら Theorem B に類する結果は

$$\sum_{X<N\leq X+H} \left| R(N) - \mathfrak{S}_2(N)N^{\frac{1}{2}} \right|^2 \tag{3}$$

というような L^2 平均を考えることで得られている. そこで $R(N)$ に関する他の形の平均を考えることで, 範囲 (2) より広い範囲で結果が得られないか試みてみたい. これはすでに Languasco and Zaccagnini [7, 8] により実行されている. Languasco と Zaccagnini が考えたのは, そのままの $R(N)$ の平均値

$$\sum_{X<N\leq X+H} R(N) \tag{4}$$

である. 上記 L^2 平均 (3) と比べて, 平均 (4) は絶対値をつけずに平均を取っているために, 各項ごとの打ち消し合いが生じ, 多少扱いやすくなっているのではないかと推測される. 以後, $\varepsilon > 0$ を正の定数とし, ある正の定数 $C(\varepsilon) > 0$ によって

$$B = \exp\left(C \left(\frac{\log X}{\log\log X} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

とおくことにする. Languasco and Zaccagnini [7] の結果は次である：

Theorem C (Languasco and Zaccagnini [7])**.** 実数 $X, H \geq 2$ に対して, 条件

$$X^{\frac{1}{2}}B^{-1} \leq H \leq X^{1-\varepsilon} \tag{5}$$

の下,

$$\sum_{X<N\leq X+H} R(N) = HX^{\frac{1}{2}} + O(HX^{\frac{1}{2}}B^{-1}) \tag{6}$$

が成り立つ.

つまり, 彼らは条件 (2) に現れる限界 $X^{\frac{1}{2}}$ を B^{-1} 程度乗り越えることに成功しているのである. 注意であるが, 条件 (5) のうち $H \leq X^{1-\varepsilon}$ の役割は

$$\sum_{X<N\leq X+H} N^{\frac{1}{2}} = HX^{\frac{1}{2}} + O(HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$$

という近似に依拠する主張や証明の簡易化であり, 本質的に必要な条件ではない.

本稿では, Languasco と Zaccagnini の試みを更に推し進め, 限界 $X^{\frac{1}{2}}$ をより大きく乗り越えられることを示したい. 得られた結果は次である：

Main Theorem. 漸近式 (6) は条件

$$X^{\theta+\varepsilon} \le H \le X^{1-\varepsilon}$$

のもと成立する. ただしここで定数 θ は

$$\theta = \frac{32-4\sqrt{15}}{49} = 0.33689\ldots$$

で与えられる.

つまり, 平均 (4) を考えるならば, Languasco と Zaccagnini の (5) を更に超えて X のべき分 H の範囲を広げることが出来るのである. Languasco and Zaccagnini [7] では circle method を用いて Theorem C を得ているが, ここでは短区間中の素数定理を得る際に用いるような, 明示公式に零点密度定理を用いる直接的な方法を取ることにする. 短区間中の素数定理については, 例えば [5, Theorem 10.5] の証明を見よ. 以下では, Main Theorem の証明のスケッチを行う.

2. 明示公式

まず, 目標の和 (4) に対する明示公式の導出を行う. 最初に

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = \sum_{X<m+n^2\le X+H} \Lambda(m)$$

に注意して,

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = \sum_{n^2\le X}\ \sum_{X-n^2<m\le X+H-n^2} \Lambda(m) + O(HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon}) \tag{7}$$

と下準備をしておく.

すると, 問題となるのはパラメター $X \le Q \le X+H$ に対して

$$\sum_{n^2\le X} \psi(Q-n^2)$$

というような和の評価である. ただしここで

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$$

とした. そこで von Mangoldt の明示公式 [11, Theorem 12.5]

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma|\le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O(XT^{-1}L^2), \quad 1\le T\le X,\ 0\le x\le X$$

を用いる. ただしここで $\rho=\beta+i\gamma$ は Riemann zeta 関数 $\zeta(s)$ の非自明な零点を重複度も込め渡るものとする. すると,

$$\sum_{n^2\le X} \psi(Q-n^2) = S(Q) - \sum_{|\gamma|\le T} S_\rho(Q) + O(HX^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} + X^{\frac{3}{2}}T^{-1}L^2), \tag{8}$$

ただし

$$S_\rho(Q) = \frac{1}{\rho}\sum_{n^2\le Q} (Q-n^2)^\rho, \quad S(Q) = S_1(Q) \tag{9}$$

を得る. 従って, (7) に (8) を代入することで

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = HX^{\frac{1}{2}} - \sum_{|\gamma|\le T}\{S_\rho(X+H)-S_\rho(X)\} + O(E), \tag{10}$$
$$E = HX^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} + X^{\frac{3}{2}}T^{-1}L^2$$

を得る.

さて, さらに oscillating sum

$$S_\rho(Q) = \frac{1}{\rho}\sum_{n^2\le Q}(Q-n^2)^\rho$$

の評価を行いたい. この評価には Poisson 和公式を用いる. すると,

$$S_\rho(Q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}Q^{\rho+\frac{1}{2}} - \frac{Q^\rho}{2\rho} + R_\rho(Q) + O(L), \tag{11}$$

ただし

$$R_\rho(Q) := -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\ne 0} n^{-1}I_n(Q,\rho), \quad I_n(Q,\rho) = \int_0^{Q-1}(Q-u)^{\rho-1}e^{2\pi i n\sqrt{u}}du$$

を得る. ここで積分 $I_n(Q,\rho)$ の評価に指数積分の標準的技法を用いれば,

$$S_\rho(Q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}Q^{\rho+\frac{1}{2}} + O\left(\frac{X^\beta L^2}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}} + L\right) \tag{12}$$

を得ることが出来る.

さて, パラメター $U \le \min(T, X^{\frac{5}{12}-\varepsilon})$ をとろう. そうして等式 (10) の右辺の零点に渡る和において $U < |\gamma| \le T$ のときのみ (12) を代入することで, 明示公式

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = HX^{\frac{1}{2}} + R_1 + R_2 + O(R_3) + O(E), \tag{13}$$

ただし

$$R_1 = -\sum_{|\gamma|\le U}\{S_\rho(X+H)-S_\rho(X)\},$$

$$R_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{U<|\gamma|\le T}\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}\left\{(X+H)^{\rho+\frac{1}{2}} - X^{\rho+\frac{1}{2}}\right\}, \quad R_3 = \sum_{U<|\gamma|\le T}\frac{X^\beta L^2}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}},$$
$$E = HX^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} + (X^{\frac{3}{2}}T^{-1}+T)L^2$$

を得る.

Remark 1. ここでパラメター U は短区間中の素数定理を証明する際の von Mangoldt 明示公式のパラメター T におおよそ対応している. 特に, $U \le X^{\frac{5}{12}-\varepsilon}$ という条件は Huxley の零点密度定理 [4] により要請されている. 尚, このパラメターを導入せずとも, 展開 (12) の代わりに

$$S_\rho(X+H) - S_\rho(X)$$

の展開を考えて誤差項を慎重に評価すれば, 虚部の小さい零点を特別扱いする必要はないと思われる. ここでは oscillating sum の評価を簡単にするため, パラメター U を導入する方法を取った.

3. 零点密度定理

さて, 前節で得た明示公式 (13) に現れる和 R_1, R_2, R_3 を評価したい. このためには, Huxley-Ingham の零点密度定理 [4]

$$N(\alpha, T) = \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \le T \\ \alpha \le \beta \le 1}} 1 \ll T^{c(\alpha)} L^A, \quad c(\alpha) = \begin{cases} \frac{12}{5}(1-\alpha) & (\text{if } \frac{3}{4} \le \alpha \le 1), \\ \frac{3(1-\alpha)}{2-\alpha} & (\text{if } \frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{3}{4}) \end{cases} \tag{14}$$

および Korobov-Vinogradov の非消滅領域 [5, Theorem 8.29]

$$\max_{|\gamma| \le X} \mathrm{Re}\rho \le 1 - D(\log X)^{-\frac{2}{3}}(\log\log X)^{-\frac{1}{3}},$$

を用いる. ただし (14) の成立範囲は $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ であり, A, D は正の定数である.

まず, 和 R_1 についてであるが,

$$\begin{aligned} S_\rho(X+H) - S_\rho(X) &= \frac{1}{\rho} \sum_{n^2 \le X-H} \left\{ (X+H-n^2)^\rho - (X-n^2)^\rho \right\} + O\left(\frac{HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{|\gamma|} \right) \\ &\ll \sum_{n^2 \le X-H} \int_{X-n^2}^{X+H-n^2} u^{\beta-1} du + HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon}|\gamma|^{-1} \\ &\ll H \sum_{n^2 \le X-H} (X-n^2)^{\beta-1} + HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon}|\gamma|^{-1} \\ &\ll HX^{\beta-\frac{1}{2}} + HX^{\frac{1}{2}-\varepsilon}|\gamma|^{-1} \end{aligned}$$

を得るので,

$$R_1 \ll HX^{\frac{1}{2}} \sum_{|\gamma| \le U} X^{\beta-1} + HX^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}$$

と評価できる. ここで零点密度定理 (14) を用いれば

$$R_1 \ll HX^{\frac{1}{2}} B^{-1}$$

が条件 $U \le X^{\frac{5}{12}-\varepsilon}$ の下で成立することを示すことが出来る.

同様に R_2 についても, $U < |\gamma| \le X/H$ なる部分の寄与は

$$\left\{ (X+H)^{\rho+\frac{1}{2}} - X^{\rho+\frac{1}{2}} \right\} = \int_X^{X+H} u^{\rho-\frac{1}{2}} du \ll HX^{\beta-\frac{1}{2}}$$

に注意すれば, 零点密度定理 (14) を用いて

$$\ll H \sum_{U < |\gamma| \le X/H} \frac{X^{\beta-\frac{1}{2}}}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}} \ll HX^{\frac{1}{2}} B^{-1}$$

と評価できる. 一方 $X/H < |\gamma| \le T$ なる部分の寄与は直接

$$\ll \sum_{X/H < |\gamma| \le T} \frac{X^{\beta+\frac{1}{2}}}{|\gamma|^{\frac{3}{2}}}$$

としてしまえば, 最終的には $U < |\gamma| \le X/H$ の部分の寄与の評価に帰着できる.

最後に和 R_3 であるが, 本質的に

$$K^{-\frac{1}{2}} \sum_{K < |\gamma| \le 2K} X^\beta$$

というような量を $U<K\leq T$ の範囲で評価すればよい. 基本的には R_2, R_3 と同様に評価するが, 計算を簡易的にするためにパラメター $0<s<1$ を用いて $T=X^s$ とおいておく. すると, 零点密度定理 (14) を用いて,

$$R_3 \ll (X^{\frac{5}{2}s+2(1-\sqrt{3s})}+U^{-\frac{1}{2}}X)L^A$$

を得ることができる.

Remark 2. この評価で $X^{\frac{5}{2}s+2(1-\sqrt{3s})}$ という項は R_1, R_2 の評価と比べ異質であるが, Ingham の零点密度定理

$$N(\alpha,T)\ll T^{\frac{3(1-\alpha)}{2-\alpha}}L^A$$

に現れる有理関数

$$\frac{3(1-\alpha)}{2-\alpha}$$

を含むような方程式の解として指数 $\frac{5}{2}s+2(1-\sqrt{3s})$ が生じているというだけである.

4. Main Theorem の証明

さて, 前節で得られた R_1, R_2, R_3 の評価を明示公式 (13) に代入すれば,

$$\sum_{X<N\leq X+H} R(N)=HX^{\frac{1}{2}}+E,$$

$$E\ll HX^{\frac{1}{2}}B^{-1}+(X^{\frac{5}{2}s+2(1-\sqrt{3s})}+X^{\frac{3}{2}-s}+U^{-\frac{1}{2}}X)L^A$$

を条件 $U\leq U^{\frac{5}{12}-\varepsilon}$ の下で得る. パラメター $0<s<1$ つまりパラメター $T=X^s$ を釣り合わせの条件

$$\frac{5}{2}s+2(1-\sqrt{3s})=\frac{3}{2}-s$$

によって

$$s=\frac{17+4\sqrt{15}}{49}$$

と選ぶ. さらに $U=X^{\frac{1}{3}}$ と選べば,

$$E\ll HX^{\frac{1}{2}}B^{-1}+X^{\theta+\frac{1}{2}}L^A\ll HX^{\frac{1}{2}}B^{-1}$$

を条件 $X^{\theta+\varepsilon}\leq H\leq X^{1-\varepsilon}$ の下で得ることができ, Main Theorem を得る.

Remark 3. さらなる改善を目指すとき, ひとまずの目標は $\theta=\frac{1}{3}$ となると思われるが, 筆者はこの改善に成功していない. この値 $\theta=\frac{1}{3}$ は零点密度予想

$$N(\alpha,T)\ll T^{2(1-\alpha)}L^A,\quad \frac{1}{2}\leq\alpha\leq 1$$

ないしは Riemann 予想を仮定して本稿の手法を適用することで得ることができる. しかし不思議なことに, Languasco と Zaccagnini [7] の circle method による方法は Riemann 予想を仮定した場合は $\theta=\frac{1}{4}$ を与えていて, 本稿の方法より良い結果を出す. 恐らく Languasco と Zaccagnini の方法では, Gallagher の補題 [1, Lemma 1] を通して Fourier 解析的な打ち消し合いを上手く検出できている一方で, 本稿の oscillating sum (9) に類する打ち消し合いを検出できていないのであろうと推測される.

References

[1] P. X. Gallagher, *A large sieve density estimate near $\sigma = 1$*, Invent. Math. **11** (1970), 329–339.

[2] H. Halberstam and H. E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, London, 1974.

[3] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), 1–70.

[4] M. N. Huxley, *On the difference between consecutive primes*, Invent. Math. **15** (1972), 164–170.

[5] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, AMS Colloquium Publications **53**, Amer. Math. Soc., 2004.

[6] K. Kawada, *Contributions to Additive Theory of Numbers*, PhD thesis, Univ. of Tsukuba, 1993.

[7] A. Languasco and A. Zaccagnini, *Short intervals asymptotic formulae for binary problems with primes and powers, I: density 3/2*, Ramanujan J. (2016).

[8] A. Languasco and A. Zaccagnini, *Short intervals asymptotic formulae for binary problems with primes and powers, II: density 1*, Monatsh. Math. **181** (2016), 419–435.

[9] R. J. Miech, *On the equation $n = p + x^2$*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 494–512.

[10] H. Mikawa, *On the sum of a prime and a square*, Tsukuba J. Math. **17** (1993), 299–310.

[11] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[12] A. Perelli and J. Pintz, *Hardy-Littlewood numbers in short intervals*, J. Number Theory **54** (1995), 297–308.

[13] A. Perelli and A. Zaccagnini, *On the sum of a prime and a k-th power*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Math. **59** (1995), 185–200.

[14] W. Schwarz, *Zur Darstellung von Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen* II, J. Reine Angew Math. **206** (1961), 78–112.

[15] Y. Suzuki, *On prime vs. prime power pairs*, preprint (2016), `arXiv:1610.09084`.

Graduate School of Mathematics, Nagoya University,
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602, Japan.

E-mail address: `m14021y@math.nagoya-u.ac.jp`