W 代数と見かけの特異点

松原　祐貴 (Yuki Matsubara) *

概要

n 点の確定特異点を持つ $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の放物接続のモジュライ空間 には見かけの特異点論による標準シンプレクティック座標が定まり, 対象である放物接続はこの座標を用いて具体的に成分表示できる．一方で, W_3 代数は n 点を固定した $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の $SL(N,\mathbb{C})$ 束上の接続が満たす偏微分方程式によって定まる．これらのことから, W_3 代数が満たす偏微分方程式を標準シンプレクティック座標を用いて表せることが分かったので紹介する．

1　放物接続のモジュライ空間と見かけの特異点論

1.1　$\boldsymbol{\nu}$-放物接続とそのモジュライ空間

この節では [1] に沿って $\boldsymbol{\nu}$-放物接続やそのモジュライ空間について概説する．

リーマン球面 $X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の異なる n 点 $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ を固定し, $\boldsymbol{x}$ に関する因子を $D = x_1 + \cdots + x_n$ と定義する．

定義 1.1. X 上の階数が r で D 上に特異点を持つ対数的接続とは組 (E, ∇) であって, E は X 上の階数が r の正則ベクトル束, $\nabla : E \to E \otimes \Omega^1_X(D)$ は次を満たす層の写像である．

$$\nabla(fe) = e \otimes df + f\nabla(e),\ f \in \mathcal{O}_X, e \in E$$

対数的接続 (E, ∇) に対して, 留数行列 $\mathbf{res}_{x_i}(\nabla) \in \mathrm{End}(E|_{x_i}) \simeq M_r(\mathbb{C})$, $(1 \leq i \leq n)$ を定義する．$\{\nu^{(i)}_0, \ldots, \nu^{(i)}_{r-1}\}$ を $\mathbf{res}_{x_i}(\nabla)$ の固有値の集合とする．これを ∇ の x_i における局所指数という．

補題 1.2. D に特異性を持つ対数的接続 (E, ∇) について, 局所指数の集合 $\boldsymbol{\nu} = (\nu^{(i)}_j)^{1\leq i\leq n}_{0\leq j\leq r-1}$ は次を満たす．

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{r-1}\nu^{(i)}_j) = -\deg E = d$$

それぞれの (n, r, d) に対して局所指数の集合を次のように定義する．

$$\mathcal{N}^n_r(d) = \left\{ \boldsymbol{\nu} = (\nu^{(i)}_j)^{1\leq i\leq n}_{0\leq j\leq r-1} \in \mathbb{C}^{nr} \,\middle|\, d + \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{r-1}\nu^{(i)}_j) = 0 \right\} \simeq \mathbb{C}^{nr-1}$$

定義 1.3. $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}^n_r(d)$ を固定する．$(X, D) := (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \boldsymbol{x})$ 上の D で特異性を持つ階数が r の $\boldsymbol{\nu}$-放物接続とは組 $(E, \nabla, \boldsymbol{l} = \{l^{(i)}_*\}_{1\leq i\leq n})$ であって, 次を満たすもののことをいう．

* 神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士課程前期 2 年 (e-mail : ymatuba@math.kobe-u.ac.jp)

(1)　E は階数が r で次数が d の正則ベクトル束

(2)　(E, ∇) は D に特異性を持つ対数的接続

(3)　それぞれの i $(1 \leq i \leq n)$ に対してフィルター付け

$$l_*^{(i)} : E|_{x_i} = l_0^{(i)} \supset l_1^{(i)} \supset \cdots \supset l_{r-1}^{(i)} \supset l_r^{(i)} = 0$$

は $\dim(l_j^{(i)}/l_{j+1}^{(i)}) = 1$ と $(\mathbf{res}_{x_i}(\nabla) - \nu_j^{(i)} id)(l_j^{(i)}) \subset l_{j+1}^{(i)},\ (j = 0, \ldots, r-1)$ を満たす.

$\boldsymbol{\nu}$-放物接続のモジュライ空間を非特異な準射影スキームとして構成するために, $\boldsymbol{\nu}$-放物接続に対して安定性を定義する. まず, 重みとして正有理数の列 $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j^{(i)}\}_{1 \leq j \leq r}^{1 \leq i \leq n}$ を次の条件を満たすものとして定義する.

$$0 \leq \alpha_1^{(i)} < \alpha_2^{(i)} < \cdots < \alpha_r^{(i)} < 1,\ (i = 1, \ldots, n)$$

$(E, \nabla, \boldsymbol{l})$ を $\boldsymbol{\nu}$-放物接続, $F \subset E$ を $\nabla(F) \subset F \otimes \Omega_X^1(D)$ を満たすゼロでない部分束とする. このとき $\mathrm{length}(F)_j^{(i)}$ を

$$\mathrm{length}(F)_j^{(i)} = \dim(F|_{x_i} \cap l_{j-1}^{(i)})/(F|_{x_i} \cap l_j^{(i)})$$

により定義する. また, $\mathrm{length}(E)_j^{(i)} = \dim(l_{j-1}^{(i)})/(l_j^{(i)})$ である.

定義 1.4. $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 $(E, \nabla, \boldsymbol{l})$ が $\boldsymbol{\alpha}$-安定であるとは, $\nabla(F) \subset F \otimes \Omega_X^1(D)$ を満たすゼロでない任意の部分束 $F \subset E$ に対して

$$\frac{\deg F + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(i)} \mathrm{length}(F)_j^{(i)}}{\mathrm{rank} F} < \frac{\deg E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(i)} \mathrm{length}(E)_j^{(i)}}{\mathrm{rank} E}$$

が成立することをいう.

$(X, D), \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_r^n(d)$ を固定し, $\boldsymbol{\alpha}$-安定 $\boldsymbol{\nu}$-放物接続の粗モジュライ空間を

$$M_{(X,D)}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}, r, d) = \{(E, \nabla, \boldsymbol{l})\}/\simeq$$

と定義する. ただし, 同値関係 $\simeq$ は $\boldsymbol{\nu}$-放物接続の間の自然な同型写像から得られる.

T_n を n 点付き非特異射影曲線 $(X, \boldsymbol{x})$ のモジュライ空間とする. 有限被覆 $\tilde{T}_n \to T_n$ をとることで, $\tilde{T}_n$ 上に普遍族が存在すると仮定してよい.

定理 1.5 ([1])**.** 一般の重み α に対し, 階数 r, 次数 d の $\boldsymbol{\alpha}$-接続の相対モジュライ空間

$$\pi : M_{(X, \tilde{\boldsymbol{x}})/\tilde{T}_n \times \mathcal{N}_r^n}^{\boldsymbol{\alpha}}(r, d) \to \tilde{T}_n \times \mathcal{N}_r^n(d)$$

が存在し, 写像 π は滑らかで準射影的である. π の $((X, \tilde{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{\nu}) \in \tilde{T}_n \times \mathcal{N}_r^n(d)$ 上のファイバーはモジュライ空間 $M_{(X,D)}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}, r, d)$ と同型である. 即ち, モジュライ空間 $M_{(X,D)}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}, r, d)$ は滑らかな準射影的スキームである. 次元は空でなければ $(r-1)\{nr - 2(r+1)\}$ である.

1.2　見かけの特異点論

この節では [4] に沿って見かけの特異点論やその具体例を概説する.

$\boldsymbol{\nu}$-放物接続 $(E,\nabla,\boldsymbol{l})$ に対し, 見かけの特異点 $\{q_i\}$ とその双対座標 $\{p_i\}$ を導入すると, $\{q_i,p_i\}$ が $\boldsymbol{\nu}$-接続のモジュライ空間 $M^{\boldsymbol{\alpha}}_{(X,D)}(\boldsymbol{\nu},r,d)$ のある Zariski 開集合 $M^{\boldsymbol{\alpha}}_{(X,D)}(\boldsymbol{\nu},r,d)^0$ 上の標準シンプレクティック座標を与えることが知られており, $M^{\boldsymbol{\alpha}}_{(X,D)}(\boldsymbol{\nu},r,d)$ 上の正則シンプレクティック構造 Ω が $M^{\boldsymbol{\alpha}}_{(X,D)}(\boldsymbol{\nu},r,d)^0$ 上で

$$\Omega = c(p_i,q_i)\sum_{i=i}^{N} dq_i \wedge dp_i$$

と書ける. ただし $c(p_i,q_i)$ は p_i,q_i に関する有理関数である. 以下, この見かけの特異点論を概説する.

補題 1.6. E を $X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の階数が r の正則ベクトル束であって, $\deg E = 1-r$ を満たすものとする. これについて $H^1(X,E)=0$ ならば

$$E \cong \mathcal{O}_X \oplus \underbrace{\mathcal{O}_X(-1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_X(-1)}_{r-1}$$

となる. 特に, $H^0(X,E)\cong H^0(X,\mathcal{O}_X)\cong\mathbb{C}$ となる.

$(E,\nabla,\boldsymbol{l})$ を $\mathrm{rank}E=r, \deg E = 1-r$ で $H^1(X,E)=0$ を満たす $\boldsymbol{\nu}$-放物接続とする. 補題 (1.6) より

$$E \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_X(-1)$$

と分解される. さらに, $(E,\nabla,\boldsymbol{l})$ は既約, つまり $\nabla(F)\subset F\otimes\Omega^1_X(D)$ を満たすゼロでない部分束 $F\subset E$ が存在しないと仮定する.

$$L := \Omega^1_X(D) \cong \mathcal{O}_X(n-2)$$

とおく.

定理 1.7 ([3])**.** $(E,\nabla,\boldsymbol{l})$ を既約で $H^1(X,E)=0$ を満たす $\boldsymbol{\nu}$-放物接続とする. これに対し, 次の完全系列が定まる.

$$0 \to F \to E \to T_A \to 0$$

ここで

$$F = \bigoplus_{j=0}^{r-1} L^{-j}$$

であり, T_A は X 上のねじれ層で, その長さは

$$N = -r^2 + n\frac{r(r-1)}{2} + 1$$

である.

既約で $H^1(X,E)=0$ を満たす $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 $(E,\nabla,\boldsymbol{l})$ に対応する点からなる $M^{\boldsymbol{\alpha}}_{(X,D)}(\boldsymbol{\nu},r,d)$ の空でない Zariski 開集合を $M^{\boldsymbol{\alpha}}_{(X,D)}(\boldsymbol{\nu},r,d)^0$ とする. 一般には T_A の台は重複度を持つが, 簡単のために相異なる点からなるとし, それらを $q_1,\ldots,q_N$ とおく. これを $(E,\nabla,\boldsymbol{l})$ の見かけの特異点という. また, このとき

$$T_A \simeq \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{C}_{q_i}$$

と分解できる.

$E|_{X\setminus\{x_i\}}$ 上で $\nabla_0 = d$ を満たし, $\mathbf{res}_{x_n}(\nabla_0)$ の固有値が整数となるような接続 $\nabla_0 : E \to E\otimes\Omega^1_X(D) = E\otimes L$ を固定する. この接続 ∇ に対して, $\Phi(\nabla) := \nabla - \nabla_0 : E \to E\otimes L$ とおく. $\Phi(\nabla)$ は $\mathcal{O}_X$-線形で, $\Phi(\nabla)\in H^0(X, \mathrm{End}(E)\otimes L)$ である. このとき $\Phi(\nabla) : T_A \to T_A\otimes L$ があり, $\mathbb{C}_{q_i}$-線形写像 $\Phi(\nabla)_{q_i} : \mathbb{C}_{q_i} \to \mathbb{C}_{q_i}\otimes L_{q_i}$ に分解する.

定義 1.8. $\Phi(\nabla)_{q_i}$ に対応するスカラー値を $p_i \in L_{q_i}$ とかく. 組 $\{p_1,\ldots,p_N\}$ を $M^{\boldsymbol{\alpha}}_{(X,D)}(\boldsymbol{\nu}, r, d)^0$ の双対座標という.

1.3 具体例

定理 (1.7) を用いて $\mathrm{rank}E = 3, n = 3, D = [0]+[1]+[\infty]$ の場合に F を構成し, $\boldsymbol{\nu}$-放物接続を見かけの特異点を用いて行列表示する.

$$\nabla : E \to E\otimes\Omega^1_X(D)$$

を対数的接続とし, $\omega = \frac{dz}{z(z-1)}$ とおく. このとき, 接続形式を表す行列 A を

$$\nabla = d + A\frac{dz}{z(z-1)} = d + A\omega \tag{1.3.1}$$

と取ると, 見かけの特異点 q と双対座標 p を用いて

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & a_{13}z^2 + b_{13}z + c_{13} \\ 1 & a_{22}z + b_{22} & a_{23}z + b_{23} \\ 0 & z - q & (z-q) + pq(q-1) \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

と表される [4]. ここで各成分の係数は局所指数 $\boldsymbol{\nu} = (\nu^{(i)}_j)$ と $\{q, p\}$ を用いて表せる.

2 W 代数

2.1 $\mathcal{W}^N_k$ 構造

この節では [2] に沿って W 代数を概説する.

$\Sigma_{g,n}$ を, 種数が g の n 点付き閉リーマン面とする. また複素構造を固定する. $\Sigma_{g,n}$ 上の主 $SL(N,\mathbb{C})$-束 V と, その上の接続 A を考える. $\mathcal{U}'$ を, $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b = \emptyset$, $(a \neq b)$ となるような x_a の開近傍とし, 滑らかな関数

$$\chi_a(z,\bar{z}) = \begin{cases} 1 & z \in \mathcal{U}_a, \mathcal{U}'_a \supset \mathcal{U}_a \\ 0 & z \in \Sigma_{g,n}\setminus\mathcal{U}'_a \end{cases}$$

を定義する.

$\Sigma_{g,n}$ 上に $(\mu, T), (\rho, W), \ldots, (\rho_j, W_j), \ldots$ を次のように定義する:

$$\begin{cases} \mu : (-1,1)\ \text{微分} & \text{ベルトラミ係数} \\ T : (2,0)\ \text{形式} & \text{ストレステンソル} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho : (-2,1)\ \text{微分} & W\ \text{の双対} \\ W : (3,0)\ \text{形式} & 3\ \text{次のカレント} \end{cases}$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} \rho_j : (-(j-1),1) \text{ 微分} & W_j \text{の双対} \\ W_j : (j,0) \text{ 形式} & j \text{ 次のカレント } (j \geq 4) \end{cases}$$

ここで, W_j, ρ_j は固定した点 x_a の近傍で

$$W_j|_{z\to x_a} \sim \frac{W_{-j,a}}{(z-x_a)^j} + \frac{W_{-j+1,a}}{(z-x_a)^{j-1}} + \cdots,$$
$$\rho_j|_{z\to x_a} \sim (t_{j,a,0} + t_{j,a,1}(z-x_a) + \cdots + t_{j,a,j-2}(z-x_a)^{j-2})\bar{\partial}\chi_a(z,\bar{z})$$
$$W_{-j,a} \sim \frac{1}{N}(\mathrm{tr}((p_a^0)^j) + \cdots)$$

と展開されるものとする.

$\Psi \in H^0(\Sigma_{g,n}, \Omega^{(-(k-1)/2,0)}(\mathrm{Aut}\, V))$ とする. このとき, $\Sigma_{g,n}$ 上の $\mathcal{W}_k^N$-構造を次の組で定義する:

$$(W_j, \rho_j),\ j = 2, \ldots, k,\ (A, \bar{A}),\ p_a,\ a = 1, \ldots, n,$$

これらは

$$\tilde{W}_k = W_k + AW_{k-1} + A^2 W_{k-2} + \cdots + A^{k-2}W_2 - A^k$$

として

$$(\kappa^k \partial^k + kA\kappa^{k-1}\partial^{k-1} + \cdots + \tilde{W}_k)\Psi = 0$$
$$(\bar{\partial} + \alpha_k \partial^{k-1} + \cdots + \alpha_1)\Psi = 0$$
$$p_a = g_a p_a^0 g_a^{-1}, \quad (g_a \in SL(N, \mathbb{C}))$$

を満たすものとする. ただし $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ と置いた. κ, α は次で定義される主 $SL(kN, \mathbb{C})$-束上の接続 $\mathcal{A}$ と $\bar{\mathcal{A}}$ の平坦条件から定まる.

$$\mathcal{A} = DS \otimes \boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{I}_k \otimes (-A)$$

$$DS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ W_k & W_{k-1} & W_{k-2} & \cdots & W_2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2 具体例

この節では $g = 0,\ n = 3$ の場合を考える. $\Sigma_{0,3}$ を考えることは $X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ とその上の 3 点 $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ の組を考えることと同じである. 分数変換により $\{x_1, x_2, x_3\} = \{0, 1, \infty\}$ としてよい. このとき, $\mathcal{W}_2^N$ 構造の次元は 0 となる.

$\mathcal{W}_3^N$-構造 (ρ, W) の情報は次で与えられる.

$$\rho_3|_{z\to x_a} \sim (t_{3,a,0} + t_{3,a,1}(z-x_a))\bar{\partial}\chi_a(z,\bar{z})$$
$$W|_{z\to x_a} \sim \frac{W_{-3,a}}{(z-x_a)^3} + \frac{W_{-2,a}}{(z-x_a)^2} + \frac{W_{-1,a}}{(z-x_a)} + \cdots$$
$$L = fAf^{-1} + f\kappa\partial f^{-1}, \quad f \in \mathcal{G} = \{\mathrm{Map}(X \to SL(3N^2, \mathbb{C}))\}$$

これらは次の関係式を満たす.

$$\{\bar{\partial}+\frac{1}{2\kappa}\partial\sum_{a=1}^{3}(t_{3,a,0}+t_{3,a,1}(z-x_a))\bar{\partial}\chi_a(z,\bar{z})L\}L+\frac{1}{2}\partial\sum_{a=1}^{3}(t_{3,a,0}+t_{3,a,1}(z-x_a))\bar{\partial}\chi_a(z,\bar{z})\partial L \qquad (2.2.1)$$
$$+\frac{1}{\kappa}\sum_{a=1}^{n}(t_{3,a,0}+t_{3,a,1}(z-x_a))\bar{\partial}\bar{\chi}_a(z,\bar{z})L\partial L=0$$

3 主結果

$N=2$ として (2.2.1) と (1.3.1), (1.3.2) を合わせることで, 見かけの特異点 q とその双対座標 p を用いて W_3 代数を書き下すことができる.

参考文献

[1] M. Inaba. "Moduli of parabolic connections on a curve and Riemann-Hilbert correspondence." arXiv preprint math/0602004 (2006).

[2] A. M. Levin and M. A. Olshanetsky. "Nonautonomous Hamiltonian systems related to higher Hitchin integrals." Theoretical and Mathematical Physics 123.2 (2000): 609-632.

[3] M.-H. Saito and S. Szabo. Apparent singularities and canonical coordinates for moduli of parabolic connections and parabolic Higgs bundles, in preparation.

[4] 木下 奈保子. "射影曲線上のある種の接続と Higgs 場の具体的表示" 神戸大学大学院 修士論文 (2011)