Arakawa-Kanekoの多重ゼータ関数の特殊値の積分表示について

川崎菜穂 (Naho Kawasaki)
東北大学大学院理学研究科

M. Kaneko と H. Tsumura は多重ゼータ関数

$$\eta(k_1,\ldots,k_r;s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(1-e^t)}{1-e^t} t^{s-1}dt \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1-r)$$

を定義した ([2]). これは, Arakawa-Kaneko の多重ゼータ関数

$$\xi(k_1,\ldots,k_r;s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(1-e^{-t})}{e^t-1} t^{s-1}dt \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

([1]) の '双子の兄弟' と呼ばれている. ただし, $k_1,\ldots,k_r$ を正の整数, s を複素変数, そして, $\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z)$ を multiple polylogarithm

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{z^{n_r}}{{n_1}^{k_1}\cdots {n_r}^{k_r}} \qquad (|z|<1)$$

とする. 多重ゼータ関数 $\eta(k_1,\ldots,k_r;s)$ および $\xi(k_1,\ldots,k_r;s)$ は複素全平面に整関数として解析接続される.

Kaneko と Tsumura は, これらのゼータ関数の特殊値と多重ゼータ値および多重ゼータスター値の間の線形関係式が存在することを示した. ただし, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\ldots,k_n)$ および多重ゼータスター値 $\zeta^\star(k_1,\ldots,k_n)$ は, 正の整数 $k_1,\ldots,k_r$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1,\ldots,k_n) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{{n_1}^{k_1}\cdots {n_r}^{k_r}} \qquad (k_r > 1)$$

および

$$\zeta^\star(\mathbf{k}) = \zeta^\star(k_1,\ldots,k_n) := \sum_{0<n_1\leq\cdots\leq n_r} \frac{1}{{n_1}^{k_1}\cdots {n_r}^{k_r}} \qquad (k_r > 1)$$

でそれぞれ定義されるものである. 任意のインデックス $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_r)$ に対して, $\mathbf{k}$ の weight および depth をそれぞれ, $|\mathbf{k}| = k_1+\cdots+k_r$, $d(\mathbf{k}) = r$ で定義する.

[2] の中で示されたある定理を紹介するために, 記法を定めておく. 任意のインデックス $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_r)$ に対して, $\mathbf{k}_+ := (k_1,\ldots,k_{r-1},k_r+1)$ とおく. インデックス $\mathbf{k}$ の双対インデックスを $\mathbf{k}'$ で表す (cf. [3]). depth が等しい二つのインデックス $\mathbf{k}$, $\mathbf{j} = (j_1,\ldots,j_r)$ に対して, $\mathbf{k}+\mathbf{j}$ をインデックス

$$\mathbf{k}+\mathbf{j} := (k_1+j_1,\ldots,k_r+j_r),$$

そして, $b(\mathbf{k};\mathbf{j})$ を

$$b(\mathbf{k};\mathbf{j}) := \prod_{i=1}^{r} \left(\begin{array}{c} k_i+j_i-1 \\ j_i \end{array} \right).$$

とおく.

Kaneko と Tsumura は [2] の中で, 次の定理を示した.

定理 1. ([2]) 任意のインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と任意の正の整数 m に対して,

$$\eta(\mathbf{k};m)=(-1)^{r-1}\sum_{|\mathbf{j}|=m-1,d(\mathbf{j})=n} b((\mathbf{k}_+)';\mathbf{j})\zeta^\star((\mathbf{k}_+)'+\mathbf{j})$$

および

$$\xi(\mathbf{k};m)=\sum_{|\mathbf{j}|=m-1,d(\mathbf{j})=n} b((\mathbf{k}_+)';\mathbf{j})\zeta((\mathbf{k}_+)'+\mathbf{j})$$

が成り立つ. ただし, 和は *weight* が $m-1$ であり, かつ, *depth* が $n=d((\mathbf{k}_+)')$ であるインデックス $\mathbf{j}$ すべてをわたる.

また, [2] を踏まえて書かれた [4] の中で, Yamamoto は次の定理を証明した.

定理 2. ([4]) 任意の正の整数 k,m に対して,

$$\eta(k;m)=\eta(m;k)$$

が成り立つ.

今回, これらの定理に再証明を与えた. 再証明に用いた補題を述べるために, Yamamoto[3] によって導入された 2-poset とそれに付随する積分表示について述べる.

定義 1. *2-poset* $X=(X,\delta_X)$ を *poset* X と *labeling map* $\delta_X:X\to\{0,1\}$ の組とする. *2-poset* X が *admissible* であるとは, X のすべての極大元 x に対して $\delta_X(x)=0$ かつ, X のすべての極小元 x に対して $\delta_X(x)=1$ となることとする.

定義 2. *admissible 2-poset* X に付随する積分を

$$I(X)=\int_{\Delta(X)}\prod_{x\in X}\omega_{\delta_X(x)}(t_x)$$

で定義する. ただし,

$$\Delta(X)=\{(t_x)_x\in[0,1]^X | t_x<t_y \ \mathit{if}\ x<y\}$$

かつ,

$$\omega_0(t)=\frac{dt}{t},\quad \omega_1(t)=\frac{dt}{1-t}$$

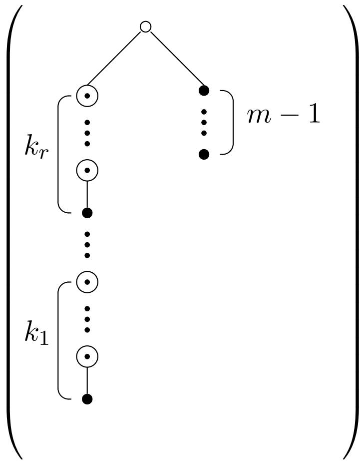
とする.

2-poset の admissible 性は, それに付随する積分の収束性に対応している. また, 2-poset を表すために, 頂点 $\circ$, $\bullet$ がそれぞれ $\delta_X(x)=0,1$ に対応している Hasse 図を用いる.

定理の再証明には次の補題を用いた.

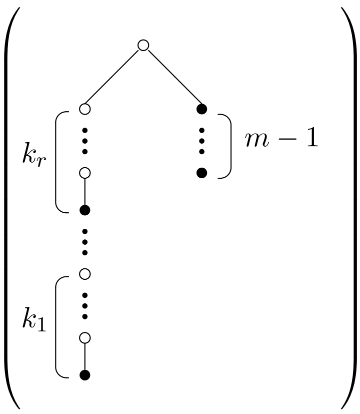
補題 1. 任意のインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と任意の正の整数 m に対して,

$$\eta(\mathbf{k};m)=(-1)^{r-1}\sum_{\odot\in\{\circ,\bullet\}} I$$



および

$$\xi(\mathbf{k};m)=I$$



.

が成り立つ. ただし, 和は $\odot$ をそれぞれ独立に $\circ$ 又は $\bullet$ に置き換えて得られる *2-poset* 全てをわたる.

[2],[4] では, $\eta(\mathbf{k};m)$ および $\xi(\mathbf{k};m)$ の定義式から, 解析的あるいは母関数の計算によって定理 1, 定理 2 を導いたが, 今回の研究では, 上述の補題と 2-poset に付随する積分の双対性を用いて, より簡潔な証明を与えた. この研究は, 大野泰生氏 (東北大学) との共同研究である.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, Nagoya Math. J., **153** (1999), 1-21.

[2] M. Kaneko and H. Tsumura, Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, preprint, arXiv:1503.02156.

[3] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, preprint, 2014, arXiv:math.NT/1405.6499.

[4] S. Yamamoto, Multiple zeta functions of Kaneko-Tsumura type and their values at positive integers, preprint, 2016, arXiv:math.NT/1607.01978.