一般超幾何関数を経由した虚数乗法を持つ楕円曲線の Beilinson 予想

伊東良純 *

概要

2012 年、Rogers 氏と Zudilin 氏は導手 27 の楕円曲線の L 関数の $s=2$ での値 $L(E_{27},2)$ を一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の特殊値で表した。彼らの手法を用いて $L(E_{32},2)$, $L(E_{64},2)$ を ${}_3F_2$ の特殊値で表す。また、これらの結果と大坪氏によるレギュレーターの一般超幾何関数表示を比較し、Beilinson 予想の特別な場合である Bloch の定理の超幾何関数を経由した証明を得る。

1 イントロダクション

数論において重要な公式の 1 つに類数公式がある。これは、ゼータ関数の特殊値という解析的な値が類数という代数的な値と非常に密接な関係があることを示している公式である。Bloch 氏はこの公式を K-理論を用いて一般化し、$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の K-群に対してレギュレーター写像

$$r: \quad K_2(E) \longrightarrow H^1(E(\mathbb{C}), \mathbb{R})$$

を定義した。ここで、H^1 は Betti コホモロジーを表す。さらに、E が虚数乗法を持つ場合に次の定理を示した [4, 5]。

定理 1.1 (Bloch)**.** ある元 $e \in K_2(E)$ が存在して、

$$r(e) = mL'(E,0)\cdot\Omega_{\mathbb{R}}(\omega_E - \overline{\omega_E}), \qquad m \in \mathbb{Q}^*.$$

ここで、ω_E は E 上の正規化された正則微分形式であり、$\Omega_{\mathbb{R}}$ はその実周期を表す。

Bloch 氏の結果を受けて、Beilinson 氏はより一般の代数多様体 X に対して、モチヴィックコホモロジーから Deligne コホモロジーへのレギュレーター写像

$$r_{\mathscr{D}}: \quad H^n_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(r))_{\mathbb{Z}} \longrightarrow H^n_{\mathscr{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(r))$$

を定義した (本稿では $n=r=2$ のときを扱う)。さらに、その値が多様体の L 関数の整数での値と非常に密接な関係がある、ということを予想した [2, 3]。これが今日 Beilinson 予想と呼ばれている予想である。$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線に対するこの予想は Bloch 氏と Beilinson 氏により解決されている。しかし、一般の場合に対するこの予想はよくわかっていない。 その原因として、K-群の構造や L-関数が難しいということが挙げられる。

E_N を導手 N の $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とする。本稿では、$N=27, 32, 64$ の場合、すなわち、

$$\begin{aligned} E_{27} &: y^2 = x^3 - \frac{27}{4}, \\ E_{32} &: y^2 = x^3 + 4x, \\ E_{64} &: y^2 = x^3 - 4x. \end{aligned}$$

* 千葉大学大学院理学研究科基盤理学専攻数学情報数理学コース, E-mail: afua9032@chiba-u.jp

を扱う。ここで、E_{27} は 3 次のフェルマー曲線に同種で $\mathbb{Z}[(-1+\sqrt{-3})/2]$ に虚数乗法を持ち、E_{32}, E_{64} は 4 次のフェルマー曲線の商に同相で $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ に虚数乗法を持つことに注意しておく。

2010 年代になり、特定の楕円曲線に対して、レギュレーターや L 関数が一般超幾何関数

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\e,f\end{matrix}\middle|z\right]:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(e)_n(f)_n}\frac{z^n}{n!} $$

の特殊値で表せることがわかってきた。ここで、$(a)_n := \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ は Pochhammer シンボルを表す。例えば、大坪氏 [11, 12] はフェルマー曲線に対して Ross 氏 [14, 15] が構成したモチヴィックコホモロジーの元のレギュレーター像を ${}_3F_2$ の特殊値で表した。さらに、Bloch 氏が構成した元と Ross 氏が構成した元のレギュレーター像を比較することで、Bloch の定理を経由して、$L'(E_{27},0)$, $L'(E_{32},0)$ を ${}_3F_2$ の特殊値で表した。ここで、関数等式

$$ L'(E_N,0)=\pm\frac{N}{(2\pi)^2}L(E_N,2). \tag{1} $$

があることに注意しておく (cf.[6])。一方、Rogers 氏と Zudilin 氏は解析的な手法を用いて直接次の公式を証明した。

定理 1.2 (Rogers-Zudilin, [13, Theorem 1])**.**

$$ L(E_{27},2)=\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{27}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\\\frac{2}{3},\frac{4}{3}\end{matrix}\middle|1\right]-\frac{\Gamma^3\left(\frac{2}{3}\right)}{18}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\\\frac{4}{3},\frac{5}{3}\end{matrix}\middle|1\right]. $$

本稿の目的は、Rogers 氏と Zudilin 氏の手法を用いて $L(E_{32},2)$ および $L(E_{64},2)$ を ${}_3F_2$ の特殊値で表すこと、またそれらの結果を大坪氏のレギュレーター公式と比較することで、E_{27}, E_{32}, E_{64} に対する Bloch の定理の一般超幾何関数を経由した新しい証明について紹介することである。

本稿では次の順で話を進める。2 節では、Rogers 氏と Zudilin 氏の手法を $L(E_{32},2)$, $L(E_{64},2)$ に適用した結果を紹介する。3 節では、レギュレーターについて簡単な復習をした後、$L'(E_{27},0)$, $L'(E_{32},0)$, $L'(E_{64},0)$ の ${}_3F_2$ の特殊値による表示と大坪氏のレギュレーター公式を比較することで、E_{27}, E_{32}, E_{64} に対する Bloch の定理の一般超幾何関数を経由した新しい証明について紹介する。

2 L-関数 (主結果 1)

Rogers 氏と Zudilin 氏の手法を $L(E_{32},2)$, $L(E_{64},2)$ に適用することで、次の結果を得る。

定理 2.1 ([8, Theorems 2.5 and 2.7])**.**

$$ \begin{aligned} L(E_{32},2)&=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{32\sqrt{2}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\\\frac{3}{2},\frac{3}{4}\end{matrix}\middle|1\right]-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{8\sqrt{2}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\\\frac{3}{2},\frac{5}{4}\end{matrix}\middle|1\right],\\ L(E_{64},2)&=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{32}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4},\frac{1}{4},1\\\frac{1}{2},\frac{5}{4}\end{matrix}\middle|1\right]-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{48}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4},\frac{3}{4},1\\\frac{3}{2},\frac{7}{4}\end{matrix}\middle|1\right]. \end{aligned} $$

以下で証明の概略について説明する。詳細は [8] を参照されたい。

E_{32} (resp. E_{64}) に対応する保型形式は、$\eta^2(q^4)\eta^2(q^8)$ (resp. $\frac{\eta^8(q^8)}{\eta^2(q^4)\eta^2(q^{16})}$) であることが知られている [9]。ここで、$\eta(q) := q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ はデデキンドエータ関数を表す。すると、E_{32} や E_{64} の L 関数の値はこれらの保型形式の Mellin 変換で得られるので、

$$ \begin{aligned} L(E_{32},2)&=-\int_0^1\eta^2(q^4)\eta^2(q^8)\log q\frac{dq}{q},\\ L(E_{64},2)&=-\int_0^1\frac{\eta^8(q^8)}{\eta^2(q^4)\eta^2(q^{16})}\log q\frac{dq}{q}, \end{aligned} $$

を得る。ここで、Jacobi の三重積公式を用いると、上に出てきた保型形式たちは次のように表せる。

$$\eta^2(q^4)\eta^2(q^8) = \frac{1}{4}\theta_2^2(q^2)\theta_4^2(q^4),$$
$$\frac{\eta^8(q^8)}{\eta^2(q^4)\eta^2(q^{16})} = \frac{1}{4}\theta_2^2(q^2)\theta_4^2(q^8).$$

ここで、$\theta_2, \theta_3, \theta_4$ は Jacobi のテータ関数で、次で定義される級数である。

$$\theta_2(q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}, \quad \theta_3(q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \quad \theta_4(q) := \theta_3(-q).$$

これらの結果を上の積分の式に代入し、θ_2^2 の Lambert 級数表示や Jacobi の虚数変換公式を用いることで次を得る。

$$L(E_{32}, 2) = \frac{\pi}{32}\int_0^1 \theta_2(q)\theta_3(q)\left(\theta_3^2(q) - \theta_2^2(q)\right)\log\left(\frac{\theta_3(q^2)}{\theta_2(q^2)}\right)\frac{dq}{q},$$
$$L(E_{64}, 2) = \frac{\pi}{64}\int_0^1 \theta_2(q)\theta_3(q)\left(\theta_3^2(q) - \theta_2^2(q)\right)\log\left(\frac{\theta_3(q^4)}{\theta_2(q^4)}\right)\frac{dq}{q}.$$

さらに、変数変換

$$q = \exp\left(-\pi\frac{{}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right| 1-x\right]}{{}_2F_1\left[\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right| x\right]}\right)$$

を行うと、上の式は次の初等的な関数の積分として表される。

$$L(E_{32}, 2) = -\frac{\pi}{32}\int_0^1 x^{1/4}\left(1 - x^{1/2}\right)\log\left(\frac{1-(1-x)^{1/2}}{x^{1/2}}\right)\frac{dx}{x(1-x)},$$
$$L(E_{64}, 2) = \frac{\pi}{64}\int_0^1 x^{1/4}\left(1 - x^{1/2}\right)\log\left(\frac{1+(1-x)^{1/4}}{1-(1-x)^{1/4}}\right)\frac{dx}{x(1-x)}.$$

すると、いくつかの簡単な計算を行うことで定理を得る。

3 比較

3.1 曲線のレギュレーター

ここでは、曲線に対する Beilinson レギュレーターについて簡単な復習をする (cf.[16])。

C を $\mathbb{Q}$ 上の滑らかな射影曲線とする。Beilinson 氏はモチヴィックコホモロジーの整部分 $H^2_{\mathscr{M}}(C, \mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}$ から実 Deligne コホモロジー $H^2_{\mathscr{D}}(C_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(2))$ への自然な写像としてレギュレーター写像

$$r_{\mathscr{D}}: \quad H^2_{\mathscr{M}}(C, \mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}} \longrightarrow H^2_{\mathscr{D}}(C_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(2))$$

を定義した (cf.[16])。

モチヴィックコホモロジーについては、同形

$$H^2_{\mathscr{M}}(C, \mathbb{Q}(2)) \cong \operatorname{Ker}\left(\tau\otimes\mathbb{Q} : K_2^M(\mathbb{Q}(C))\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow \bigoplus_{x\in C^{(1)}} \kappa(x)^*\otimes\mathbb{Q}\right)$$

が知られている (cf.[10])。ここで、

$$K_2^M(\mathbb{Q}(E)) := \mathbb{Q}(E)^*\otimes\mathbb{Q}(E)^* / \langle a\otimes(1-a) | a\neq 0, 1\rangle$$

は C の 2 次 Milner K-群、$C^{(1)}$ は C の閉点、$k(x)$ は x における剰余体、$\tau=(\tau_x)$ は $K_2^M(C)$ 上の tame シンボル

$$\tau_x(\{f,g\})=(-1)^{\mathrm{ord}_x f\,\mathrm{ord}_x g}\left(\frac{f^{\mathrm{ord}_x g}}{g^{\mathrm{ord}_x f}}\right)(x)$$

を表す。このとき、整部分 $H^2_{\mathscr{M}}(C,\mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}$ は、C の $\mathbb{Z}$ 上固有かつ平坦な正則モデルの K-群の像で定義される。

一方、Deligne コホモロジーについては、同形

$$H^2_{\mathscr{D}}(C_{\mathbb{R}},\mathbb{R}(2))\cong H^1(C(\mathbb{C}),\mathbb{R}(1))^+$$

が知られている ([7])。ここで、$+$ は de Rham conjugation $F_\infty\otimes c_\infty$ による固定部分を表す (ただし、F_∞ は $C(\mathbb{C})$ に作用する複素共役であり、c_∞ は係数に作用する複素共役である)。

E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とする。$\omega_E\in H^0(E(\mathbb{C}),\Omega^1)^+$ を

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{E(\mathbb{C})}\omega_E\wedge\overline{\omega_E}=-1$$

(ただし、$\overline{\omega_E}:=F_\infty\omega_E=c_\infty\omega_E$) 正規化された実正則微分形式とする。このとき、$H^1(E(\mathbb{C}),\mathbb{R}(1))^+$ は $\omega_E-\overline{\omega_E}$ で生成されることに注意しておく。また、$E(\mathbb{R})^0$ を原点の連結成分で、向きを実周期

$$\Omega_{\mathbb{R}}:=\int_{E(\mathbb{R})^0}\omega_E$$

が正数となるようにとる。

X_n を n 次フェルマー曲線とする。

$$X_n:\qquad u^n+v^n=1.$$

有限射 $f:X_n\longrightarrow E_N$

$$\begin{aligned}
f(u,v)&=\left(\frac{3v}{1-u},\frac{9(1+u)}{2(1-u)}\right) &&\text{for}\ \ (n,N)=(3,27),\\
f(u,v)&=\left(\frac{2(1-v^2)}{u^2},\frac{4(1-v^2)}{u^3}\right) &&\text{for}\ \ (n,N)=(4,32),\\
f(u,v)&=\left(\frac{2(u^2-1)}{v^2},\frac{4u(u^2-1)}{v^3}\right) &&\text{for}\ \ (n,N)=(4,64).
\end{aligned}$$

により、Ross の元 $e_n:=\{1-u,1-v\}\in H^2_{\mathscr{M}}(X_n,\mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}$ から $H^2_{\mathscr{M}}(E_N,\mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}$ の元

$$e_{E_N}:=f_*(e_n)\in H^2_{\mathscr{M}}(E_N,\mathbb{Q}(2))_{\mathbb{Z}}$$

を得る。大坪氏はこの元のレギュレーター像を一般超幾何関数

$$\tilde{F}(\alpha,\beta):=\left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)^2{}_3F_2\left[\left.\begin{matrix}\alpha,\beta,\alpha+\beta-1\\ \alpha+\beta,\alpha+\beta\end{matrix}\right|1\right].$$

の特殊値で表した。

定理 3.1 (Otsubo, [12])**.**

$$\begin{aligned}
r_{\mathscr{D}}(e_{E_{27}})&=-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}\left(\tilde{F}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)-\tilde{F}\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right)\left(\omega_{E_{27}}-\overline{\omega_{E_{27}}}\right),\\
r_{\mathscr{D}}(e_{E_{32}})&=-\frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{\pi}}\left(\tilde{F}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)-\tilde{F}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)\right)\left(\omega_{E_{32}}-\overline{\omega_{E_{32}}}\right),\\
r_{\mathscr{D}}(e_{E_{64}})&=-\frac{1}{16\sqrt{\pi}}\left(\tilde{F}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)-\tilde{F}\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)\right)\left(\omega_{E_{64}}-\overline{\omega_{E_{64}}}\right).
\end{aligned}$$

であり、$r_{\mathscr{D}}(e_{E_{27}})\neq 0$, $r_{\mathscr{D}}(e_{E_{32}})\neq 0$, $r_{\mathscr{D}}(e_{E_{64}})\neq 0$。

3.2 主結果 2

定理 1.2, 2.1 と定理 3.1 を比較することで、一般超幾何関数を経由して定理 1.1 の新しい証明を得る。

定理 3.2 ([8, Theorems 3.3, 3.5 and 3.7]).

$$\begin{aligned}
r_{\mathscr{D}}(e_{E_{27}}) &= -\frac{3}{2}L'(E_{27},0)\Omega_{\mathbb{R}}(\omega_{E_{27}} - \overline{\omega_{E_{27}}}),\\
r_{\mathscr{D}}(e_{E_{32}}) &= -\frac{1}{2}L'(E_{32},0)\Omega_{\mathbb{R}}(\omega_{E_{32}} - \overline{\omega_{E_{32}}}),\\
r_{\mathscr{D}}(e_{E_{64}}) &= -\frac{1}{2}L'(E_{64},0)\Omega_{\mathbb{R}}(\omega_{E_{64}} - \overline{\omega_{E_{64}}}).
\end{aligned}$$

証明には、関数等式 (1) と Thomae の公式 (cf.[1, p.14, (1)])

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c \\ e,f \end{matrix}\middle| 1\right] = \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(s)}{\Gamma(a)\Gamma(b+s)\Gamma(c+s)}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix} e-a, f-a, s \\ s+c, s+b \end{matrix}\middle| 1\right]$$

(ただし、$s := e+f-(a+b+c)$) を用いる。詳細は [8] を参照されたい。

参考文献

[1] W.N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge Mathematical Tract No.32, 1973.

[2] A.A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions of curves*, Funct. Anal. Appl. 14 (2), 1980, p.116-118.

[3] A.A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, J. Sov. Math. 30, 1985, p.2036-2070.

[4] S. Bloch, *Lectures on Algebraic Cycles, Duke Univ. Math. Ser., vol. IV*, Duke University, Durham, 1980.

[5] S. Bloch, *Higher Regulators, Algebraic K-Theoory, and Zeta Functions of Elliptic Curves, CRM Monogr. Ser., vol, 11*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[6] C. Deninger and K. Wingberg, *On the Beilinson conjectures for elliptic curves with complex multiplication*, Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions, Perspect. Math., vol. 4, Academic Press, Boston, 1988, p.249-272.

[7] H. Esnault, E. Viehweg, *Deligne-Beilinson Cohomology*, Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions, Perspect. Math., vol. 4, Academic Press, Boston, 1988, p.43-92

[8] R. Ito, *The Beilinson conjectures for CM elliptic curves via hypergeometric functions*, The Ramanujan Journal, Springer. (to appear)

[9] Y. Martin and K. Ono, *Eta-quotients and Elliptic Curves*, American Mathematical Society Volume 125 Number 11, 1997, p.3169-3176.

[10] J. Nekovář, *Beilinson's Conjectures*, Motives (Seattle, WA, 1991). Proc. Sympos. Pure Math. 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p.537-570.

[11] N. Otsubo, *On the regulator of Fermat motives and generalized hypergeometric functions*, J. Reinc Angew. Math. 660, 2011, p.27-82.

[12] N. Otsubo, *Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric functions*, Journal of Number Theory 131, 2011, p.648-660.

[13] M. Rogers and W. Zudilin, *From L-series of elliptic curves to Mahler measures*, Compositio Math. 148, 2012, p.385-414.

[14] R. Ross, K_2 *of Fermat curves and values of L-functions*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér.I 312, 1991, p.1-5.

[15] R. Ross, K_2 *of Fermat curves with divisorial support at infinity*, Compos. Math. 91, 1994, p.223-240.

[16] P. Schneider, *Introduction to the Beilinson conjectures*, Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions, Perspect. Math., vol. 4, Academic Press, Boston, 1988, p.1-35.