有限体上の 2 次形式に付随する指標和について

赤坂 健介　(Kensuke Akasaka)*

概要

$q = p^m$(p : 奇素数) とする．有限体 $\mathbb{F}_q$ に成分をもつ n 次対称行列と $\mathbb{F}_q^\times$ の指標 χ に対して，

$$h(A,\chi) = \sum_{U \in SL_n(\mathbb{F}_q)} \chi(tr(A[U]))$$

と定義する．これはジーゲル・カスプ形式に付随し，いわゆる $Twisted\ Koecher-Maass$ 級数に応用されている．$m = 1$ のとき，$h(A,\chi)$ は H.Katsurada[2] によって求められている．本講演では m が一般のときについて $h(A,\chi)$ を [2] とは別の方法で求める．

1　導入

可換環 R に対して，R の単数群を $R^\times$ とする．

$$R^\times = \left\{a \in R \mid {}^\exists b \in R\ s.t.\ ab = 1\right\}$$

特に R が体のとき，$R^\times = \{a \in R \mid a \neq 0\}$ である．

$$S_n(R) := \left\{A \in M_n(R) \mid {}^tA = A\right\}$$
$$L_n(R) := \left\{A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(R) \mid a_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, a_{ii} \in \mathbb{Z}, a_{ij} = a_{ji}\right\}$$

と定義する．

$F_q^\times =< a >$ とする．$l|q-1$ のとき，$\mathbb{F}_q^\times$ の指標 $\chi_{q,l}$ を $\chi_{q,l}(a) = \zeta_l$ と定義する．ただし，$\zeta_l = exp(\frac{2\pi i}{l})$ とする．

$q = p^m$(p : 奇素数) とする．有限体 $\mathbb{F}_q$ に成分をもつ n 次対称行列 A と $\mathbb{F}_q^\times$ の指標 χ に対して，

$$h(A,\chi) = \sum_{U \in SL_n(\mathbb{F}_q)} \chi(tr(A[U]))$$

と定義する．tr とはトレースを指す．また $A[U] = {}^tUAU$ である．ただし，$\chi(0) = 0$ とおく．χ_0 に対して，$\chi_0(\alpha) = \zeta_{q-1}$ と定義する．

* 〒050-8585 北海道室蘭市水元町２７－１ 室蘭工業大学大学院 工学研究科 情報電子工学系専攻 数理科学研究室
email:16043003@mmm.muroran-it.ac.jp

2 主結果

$q = p^m$ の m が一般のときについての $h(A,\chi)$ の明示公式を述べる．

主定理 1

$\chi \neq 1$, $n > 2$ とする．

(1) n を奇数とし，$gcd(q-1,n) = l$ とする．また n が 3 のとき，$tr(E) = 0$, $detE = 1$ とする．ただし χ^2 が単位指標でないとする．

(i) $\chi = \chi_0^s$ かつ $s \not\equiv 0\ (mod\ l)$ のとき，

$$h(A,\chi) = 0.$$

(ii) $\chi = \chi_0^{ls}$ とする．$n = lt$ とすると $gcd(q-1,t) = 1$ なので，$ut + v(q-1) = 1$ となる u, v が存在する．$\widetilde{\chi} = \chi_0^{su}$ とおくと $\widetilde{\chi}^n = \chi$ となる．$\widetilde{\chi}\chi_{q,l}^j = \widetilde{\chi}^{(j)}$ とおく．このとき，

$$h(A,\chi) = \gamma_{n,q} \sum_{j=0}^{l-1} \widetilde{\chi}^{(j)}(4detA) \sum_{E \in S_{n-3}(\mathbb{F}_q)} \sum_{\substack{w \in \mathbb{F}_q \\ w \neq 0, 1-tr(E)}} \overline{\widetilde{\chi}}^{(j)2}(w)\overline{\widetilde{\chi}}^{(j)}(1-w-tr(E))\left(\overline{\widetilde{\chi}}^{(j)}\chi_{q,2}\right)(detE).$$

(2) $n \geq 4$ の偶数とし $gcd(q-1,n) = l$ とする．また $n = 4$ のとき，$tr(E) = 0$, $detE = 1$ とする．

(i) $\chi = \chi_0^s$ かつ $s \not\equiv 0\ (mod\ l)$ のとき，

$$h(A,\chi) = 0.$$

(ii) $\chi = \chi_0^{ls}$ とする．$n = lt$ とすると $gcd(q-1,t) = 1$ なので，$ut + v(q-1) = 1$ となる u, v が存在する．$\widetilde{\chi} = \chi_0^{su}$ とおくと $\widetilde{\chi}^n = \chi$ となる．$\widetilde{\chi}\chi_{q,l}^j = \widetilde{\chi}^{(j)}$ とおく．このとき，

$$h(A,\chi) = \gamma_{n,q} \sum_{j=0}^{l-1} \widetilde{\chi}^{(j)}\left(4^2 detA\right) \sum_{E \in S_{n-4}(\mathbb{F}_q)} \sum_{\substack{w \in \mathbb{F}_q \\ w \neq 0, 1-tr(E)}} \overline{\widetilde{\chi}}^{(j)2}(w)\overline{\widetilde{\chi}}^{(j)2}(1-w-tr(E))\overline{\widetilde{\chi}}^{(j)}(detE).$$

(3) $detA = 0$ のとき，

$$h(A,\chi) = 0.$$

$\gamma_{n,q}$ は n, q によって明示的に定まる定数である．ただし，$\overline{\chi}(*) = \overline{\chi(*)}$ である．

参考文献

[1] H.Katsurada and Y.Mizuno. Linear dependence of certain L-values of half-integral weight modular forms, J.London Math. 85 (2012) 455-471

[2] H.Katsurada. Explicit formulas for the twisted Koecher-Maaβ series of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift and their applications. Math.Z. 276 (2014) 1049-1075

[3] K.Hasiguchi. 2 次形式に付随する指標和について. 室蘭工業大学大学院数理システム専攻 (2013)

[4] Y.Kitaoka. Arithmetic of quadratic forms. Cambridge University Press (1993)