

非局所発展方程式の反応拡散近似

田中吉太郎¹, 二宮広和², 山本宏子³

¹ 北海道大学大学院 理学研究院, ² 明治大学 総合数理学部, ³ 明治大学 研究・知財戦略機構

yoshitaro.tanaka@math.sci.hokudai.ac.jp

概要

近年, 対象までの距離に依存して働きをかえる空間大域的に影響を及ぼす相互作用の存在が報告され, 合成積付きの発展方程式が提案されている. この合成積の積分核の形によって, 発展方程式の解が不安定化することが報告されているが, 積分核の形と解の不安定化の関係は不明であった. 本テクニカルレポートでは, 合成積付きの発展方程式を反応拡散系で近似することで, 両者の関係を説明した結果を紹介するとともに, 与えられた積分核から, 反応拡散系の係数を決定する手法を提案する.

1 はじめに

1.1 積分相互作用と先行研究

魚の表皮の色素細胞に, 対象までの距離に依存して働きをかえる相互作用の存在が実験的に報告された [8, 11]. このような相互作用は空間大域的に影響を及ぼすため, 適当な積分核との合成積で数式化され, 発展方程式がいくつか提案されている. この合成積による相互作用 (積分相互作用と呼ぶことにする) は脳の神経の発火現象 [1] や, 生物の生物分散現象 [7] の数理モデルに応用されており, この積分項付きの発展方程式 (非局所発展方程式と呼ぶことにする) は, 近年盛んに解析がなされている. 特に [11] で, 魚の表皮の色素細胞には, 活性化作用が局所的でありながら, 抑制化作用が大域的である相互作用の存在が生物実験的に報告された. この相互作用は図 1 の上方にある関数で記述され, 形状から「メキシカンハット」と呼ばれる.

代表的な非局所発展方程式の一つに, 脳の発火現象を記述する以下の非局所発展方程式がある [1]:

$$\tau \frac{\partial u}{\partial t} = -u + \int_{\mathbb{R}} w(x-y)H(u(y,t))dy + s(x,t).$$

ここで, $u(x,t)$ は時刻 t における場所 x の神経の膜電位であり, $\tau > 0$ は定数, $w(x)$ は積分核で, s は外部刺激で, H はヘビサイド関数である. [1] では, $w(x)$ にメキシカンハットの関数を導入して, 方程式の解の定性的な振る舞いを解析している. この方程式を二次元平面上で数値的に解くと, 解としてスポット解やストライプ解が得られることが知られ

ている [9, 10] .

また，反応拡散系の拡張として，次のような生物分散現象の数理モデルが近年よく解析されている [7]:

$$u_t = \int k(x-y)u(y,t)dy - bu + f(u). \quad (1)$$

ここで， $u = u(x,t)$ はある生物の個体数密度， $k(x)$ は正の値の積分核， $b > 0$ は定数， f は u の非線形関数である．積分核 k と u の合成積によって，遠くまで移動できる離散的な拡散を表している．(1) の方程式の導出は，[7] によってなされ，定常解の存在や安定性，さらに進行波解の存在が [2, 3, 4] に報告されている．

また，非局所的な飽和効果を再現する数理モデルとして，以下の方程式がある [5]:

$$u_t - \Delta u = \mu u(1 - k * u).$$

ここで， $k(x)$ は正の積分核で， $k * u$ は合成積， μ は定数である．Berestycki 等は，[5] で定常解の存在と，進行波解の存在を示している．

最近では，[8] によって，以下の非局所発展方程式が提案された:

$$u_t = f(J * u; U) - bu.$$

ここで， J はメキシカンハットやそれ以外の形状の積分核を含み，関数 f は濃度の正値性と飽和効果をあらわす関数で，

$$f(x; U) = \begin{cases} 0, & (x < 0), \\ x, & (0 < x < U), \\ U, & (U < x) \end{cases}$$

である．この非局所発展方程式では，積分核の形によって，動物や魚の表皮に観察されるストライプやスポット，迷路パターン等様々なパターンが再現されることが報告されている．

1.2 本研究の動機と主結果

上記で紹介したように，非局所発展方程式は，様々なパターンを再現することがわかる．[10] では，積分核の形によって，非局所発展方程式の定数定常解が不安定化を起こすことが報告された．しかし，図 1 のように，方程式の中で用いられている積分核の形状が少し変わるだけで，解の形状が変わる数値計算例があり，このことから非局所発展方程式の解の不安定化と積分核の形状の関係を調べる必要があった．このことを動機として，

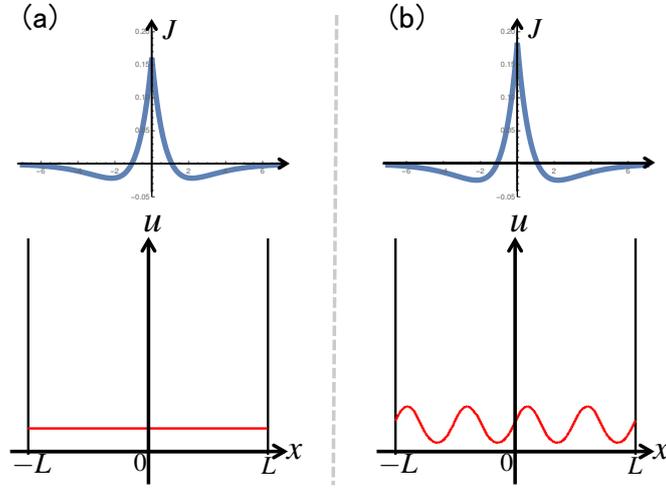


図1 積分核の形を少し変えるだけで、解の形状が変わる数値計算例。(a)と(b)で積分核の形以外、パラメータは同じである。上の段が用いた積分核のグラフを表し、下の段が $t = 100$ まで計算した時の解のプロファイルとなっている。

我々は、[12]で、1次元周期境界条件 \mathbb{T} 上で、積分相互作用付きの発展方程式を提案し、反応拡散系に近似することで、非局所発展方程式と反応拡散系の関係を数学的に明らかにした。 $u = u(x, t)$ を理論的な濃度とし、以下の非局所発展方程式を調べた：

$$\begin{cases} u_t = d_u u_{xx} + g(u, J * u), & \text{in } \mathbb{T} \times \{t > 0\}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{on } \mathbb{T}. \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbb{T} = [-L, L]$ で周期境界条件を課し、 $J \in C_{per}(\mathbb{T}) = \{u \in C(\mathbb{R}) \mid u(x) = u(x + 2L)\}$ は積分核で、 $J * u = \int_{\mathbb{T}} J(x - y)u(y, t)dy$ であり、 J の典型例はガウス核や、メキシカンハットである。関数 g は、 \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への C^1 級関数とし、以下を満たすと仮定する。

$$(A1) \quad f(u) = g(u, 0), \quad g(0, 0) = g(1, 0) = 0, \quad g_u(1, 0) < 0, \quad g_v(1, 0) > 0,$$

$$(A2) \quad g(u, v)u \leq -g_0|u|^{p+1} + g_1|u^2v| + g_2|uv| + g_3|u^2|,$$

$$(A3) \quad \left| g_u(u, v) + g_0 p |u|^{p-1} \right| \leq g_4|v| + g_5,$$

$$(A4) \quad |g_v(u, v)| \leq g_6|u| + g_7,$$

$$(A5) \quad p \geq 3 \text{ or } g_1 = g_6 = 0 \text{ if } 2 \leq p < 3.$$

ここで, g_0 は正定数で, g_1, \dots, g_7 と $p \geq 2$ は非負定数である. 典型的な関数 g の例は, 以下のような関数である:

$$f(u) = au(1 - u^2), \quad g(u, v) = uv + au(1 - u^2), \quad (3)$$

$$f(u) = au(1 - u), \quad g(u, v) = v + au(1 - |u|). \quad (4)$$

ここで, $a > 0$ は定数である (詳しくは [12]). v が $J * u$ に対応するので, 上記の定義 (3) では, 積分相互作用 $J * u$ が u の成長率の働きをしている. この非局所的な成長率の効果は以下のように理解することができる. 簡単のため, J がメキシカンハットの場合を説明する. まず $J * u$ は合成積なので, 解 u を積分して初めて, 点 x での濃度の成長率の増減が決まる. つまり, ある点 x での成長率は, $u \geq 0$ であることを合わせると, その点 x の近傍では u の大きさに比例して増加する効果と, 点 x の遠方では u の大きさに比例して減少する効果を合わせた量が成長率になっている. 一方 (4) では, v に関して線形であるので, (1) と同様に積分項が濃度の分散の効果を表している.

この非局所発展方程式の解を近似するために, 補助的な活性因子と抑制因子 $v_j = v_j(x, t)$, ($j = 0, \dots, M$) を導入して, 以下の反応拡散系を提案した:

$$\begin{cases} u_t &= d_u u_{xx} + g(u, \sum_{j=0}^M \alpha_j v_j), \\ v_{j,t} &= \frac{1}{\varepsilon} (d_j v_{j,xx} + \mu u - v_j). \end{cases} \quad x \in \mathbb{T}, t > 0 \quad (5)$$

ここで, $d_j > 0$ は拡散係数, $\mu > 0$, α_j は定数, $0 < \varepsilon \ll 1$ である. 形式的に, $\varepsilon \rightarrow +0$ とすれば, v_j は定常解に収束し, つまり, $0 = d_j v_{j,xx} - v_j + u$ を満たすことが予想される. この方程式は, 周期境界条件下での $d_j v_{j,xx} - v_j + u = 0$ の Green 関数

$$k^d(x) := \frac{1}{2\sqrt{d} \sinh \frac{L}{\sqrt{d}}} \cosh \frac{L - |x|}{\sqrt{d}}$$

を用いて, 解くことができ,

$$v_j = \mu k^{d_j} * u$$

となる. この解 $k^{d_j} * u$ を (5) に代入すれば, $J = \mu \sum_{j=0}^M \alpha_j k^{d_j}$ となる非局所発展方程式が得られる. 実際, $\{d_j, \alpha_j\}_{j=0}^M$ をうまくとれば, 任意の連続偶関数 $J \in C_{per}(\mathbb{T})$ をもつ非局所発展方程式の解も, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることで反応拡散系 (5) によって解が近似できることを示した. 我々の結果は以下の通りである:

Theorem 1.1 ([12] の主定理). 任意の連続偶関数 $J \in C_{per}(\mathbb{T})$ と任意の定数 $T > 0$, 小さな正数 $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 M と定数 $\{d_j, \alpha_j\}_{j=0}^M$ が存在し, (2) の解 u と, (5) の解 \tilde{u} は

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{C_{per}(\mathbb{T})} \leq \varepsilon$$

を満たす.

証明は Weierstrass の定理と数学的帰納法, エネルギー法による.

この定理から, 任意の積分核をもつ非局所発展方程式が反応拡散系で近似されることが示された. しかしながら, 近似できるパラメーター $\{d_j, \alpha_j\}_{j=0}^M$ が存在することを示しただけで, 具体的に, $\{\alpha_j\}_{j=0}^M$ を求める方法が構築できなかった. このことを受けて, 本講演では, 「与えられた積分核 J に対して $\{\alpha_j\}_{j=0}^M$ を決定する方法」を考察する. もし, $\{\alpha_j\}_{j=0}^M$ を求める方法が分かれば, 与えられた積分核に対して, 具体的に (RD^ε) を求めることができる. これにより, 非局所発展方程式の解の近似解が求められることになるので, すでに多くの結果が知られた反応拡散系の枠組みで近似解を詳細に調べることで, 非局所発展方程式の解の挙動を予想することができる. そこで我々は, \mathbb{R} 上で非局所発展方程式を反応拡散系で近似するために, Gram-Schmidt の直交化法を用いて, $\{\alpha_j\}_{j=0}^M$ を具体的に求めた.

2 1次元 Euclid 空間上での非局所発展方程式と反応拡散系

非局所発展方程式と反応拡散系の関係を調べるために, 以下の発展方程式を解析する:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t = d_u u_{xx} + g(u, J * u), & \text{in } \mathbb{R} \times \{t > 0\}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{on } \mathbb{R}. \end{cases}$$

ここで, $J \in L^1(\mathbb{R}) \cap BC(\mathbb{R})$ は積分核で, $J * u = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y, t)dy$ で, g は \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への C^1 関数で, (A1) から (A5) を満たす.

次に, 問題 (P) を近似するために, 補助因子 $v_j = v_j(x, t)$, ($j = 0, \dots, M$) を導入し, (5) の \mathbb{R} 上の反応拡散系を考える:

$$(RD^\varepsilon) \quad \begin{cases} u_t = d_u u_{xx} + g(u, \sum_{j=0}^M \alpha_j v_j), & \text{in } \mathbb{R} \times \{t > 0\}, \\ v_{j,t} = \frac{1}{\varepsilon} (d_j v_{j,xx} + \mu u - v_j). \end{cases}$$

ここで, \mathbb{R} 上での $0 = d_j v_{j,xx} - v_j + u$ の解 $v_j(x, t) = (k_j^d * u)(x, t)$ はフーリエ変換を用いて

求めることができ、このとき $k^d(x)$ は以下で与えられる：

$$k^d(x) = \frac{1}{2\sqrt{d}} e^{-\frac{1}{\sqrt{d}}|x|}.$$

3 主結果

k^{d_j} の線形結合 $\sum_{j=0}^M \alpha_j k^{d_j}$ で J を近似することを考える．一般性を失わずに $\mu = 1$ とできる． k^{d_j} は偶関数なので、半空間 $[0, \infty]$ での近似を考えればよい．

$$d_j = \frac{1}{j^2}, \quad (j = 1, \dots, M)$$

とおく． d_0 に関しては、十分大きい数と定義する．すると、 k^{d_j} は以下のように計算される、

$$k^{d_j}(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|}.$$

ここで、 e^{-jx} の線形結合を考える前に、 $y = e^{-x}$ により変数変換をおこない、 y に関する多項式に対して Gram-Schmidt の直交化法を用いる． y の k 次直交多項式を $P_k(y)$ とする． $[0, \infty]$ 上で、以下の内積を与える

$$\int_0^\infty P(e^{-x})Q(e^{-x})e^{-2x}dx = \int_0^1 P(y)Q(y)ydy.$$

この内積を用いて、Gram-Schmidt の直交化法を用いると

$$\int_0^1 P_k(y)P_l(y)ydy = \delta_{k,l}$$

となる直交多項式を構築することができる．実際、

$$\begin{aligned} P_0(y) &= \sqrt{2}, \\ P_1(y) &= 2(3y - 2), \\ P_2(y) &= \sqrt{6}(10y^2 - 12y + 3), \\ P_3(y) &= 2\sqrt{2}(35y^3 - 60y^2 + 30y - 4), \\ &\vdots \end{aligned}$$

と求めることができる．[6] の定義に従い、重み関数が $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ である区間 $[-1, 1]$ の Jacobi 多項式を $Q_k^{(\alpha, \beta)}(y)$ とすると、この多項式は、 $P_k(y) = \sqrt{2(k+1)}Q_k^{(1, 0)}(1-2y)$ に

なっており、漸化式は知られている。\$P_k(y)\$ は \$y\$ の \$k\$ 次多項式であるから、係数 \$p_{0,k}, \dots, p_{k,k}\$ が存在し、

$$P_k(y) = \sum_{j=0}^k p_{j,k} y^j$$

と書くことができる。もし、\$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x J(x)\$ が存在して、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x J(x) < \infty \tag{6}$$

ならば、

$$K(y) := \frac{J(-\log y)}{y} \tag{7}$$

は \$[0, 1]\$ 上で連続である。ここで、

$$q_k := \int_0^\infty J(x) P_k(e^{-x}) e^{-x} dx = \int_0^1 J(-\log y) P_k(y) dy = \int_0^1 K(y) P_k(y) y dy \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{8}$$

とおく。これは、もし \$K(y) = \sum_{j=0}^k a_j P_j(y)\$ で \$0 \leq k \leq \ell\$ ならば

$$q_k = \int_0^1 \sum_{j=0}^{\ell} a_j P_j(y) P_k(y) y dy = a_k$$

が成り立つことを意味する。

Theorem 3.1. 積分核 \$J\$ は偶関数で、(6) を満たすとする。任意の正の小さな数 \$\varepsilon\$ に対し、ある正の整数 \$k\$ が存在して、

$$\left\| J(x) - \sum_{j=0}^k q_j P_j(e^{-|x|}) e^{-|x|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \varepsilon$$

が成立する。ここで \$q_k\$ は (8) によって定義される。

Proof. (7) で定めた \$K\$ は \$[0, 1]\$ 上連続なので、Weierstrass の多項式近似の定理を使えば、\$K\$ は多項式で近似される。つまり、ある正整数 \$k\$ と定数 \$a_0, \dots, a_k\$ があって、

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} |K(y) - \sum_{j=0}^k a_j P_j(y)| \leq \varepsilon \tag{9}$$

を満たす．変数変換をすることで，

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \left| J(x) - \sum_{j=0}^k q_j P_j(e^{-x}) e^{-x} \right|^2 dx &= \int_0^1 \left| J(-\log y) - \sum_{j=0}^k q_j P_j(y) y \right|^2 \frac{dy}{y} \\
 &= \int_0^1 \left| K(y) - \sum_{j=0}^k q_j P_j(y) \right|^2 y dy \\
 &= \int_0^1 \left| K(y) - \sum_{j=0}^k a_j P_j(y) - \sum_{j=0}^k (q_j - a_j) P_j(y) \right|^2 y dy \\
 &= \int_0^1 \left| K(y) - \sum_{j=0}^k a_j P_j(y) \right|^2 y dy - \sum_{j=0}^k (q_j - a_j)^2
 \end{aligned}$$

を得る．(9)を使えば，

$$\int_0^\infty \left| J(x) - \sum_{j=0}^k q_j P_j(e^{-x}) e^{-x} \right|^2 dx \leq \frac{\varepsilon^2}{2} - \sum_{j=0}^k (q_j - a_j)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$$

となる．この不等式を用いれば， $J(x)$ と $e^{-j|x|}$ が偶関数であることに注意すると，

$$\left\| J(x) - \sum_{j=0}^k q_j P_j(e^{-|x|}) e^{-|x|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \varepsilon$$

を得る． □

この定理から， $\sum_{j=0}^k q_j P_j(e^{-|x|}) e^{-|x|}$ を $e^{-j|x|}$, ($j = 1, \dots, M$) の順にまとめれば，

$$c_{j,k} = \sum_{i=j-1}^k p_{j-1,i} q_i$$

を用いて

$$\sum_{j=0}^k q_j P_j(e^{-|x|}) e^{-|x|} = \sum_{j=1}^{k+1} c_{j,k} e^{-j|x|}$$

と表すことができる．したがって，(6)を満たす偶関数 $J(x)$ を $e^{-j|x|}$ の線形結合で近似することができ，近似する反応拡散系 (RD^ε) の係数は

$$\alpha_j = \frac{2}{j} c_{j,M-1}, \quad (j = 1, \dots, M)$$

によって決定される．

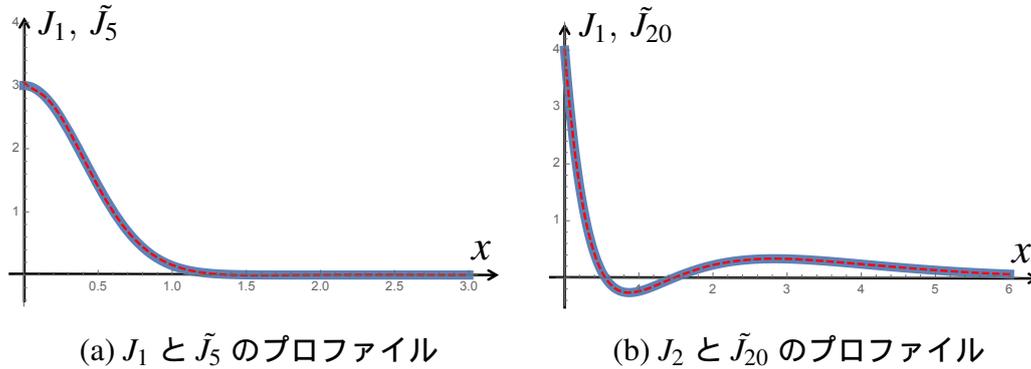


図 2 J_1, J_2 と \tilde{J}_k のプロファイル . 青色の実線がそれぞれ, J_1 と J_2 を表し, 赤色の点線が \tilde{J}_k を表す . (a) は $x \in [0, 3]$ 上の J_1 と \tilde{J}_5 のプロファイル, (b) は $x \in [0, 6]$ 上の J_2 と \tilde{J}_{20} のプロファイルを表す .

図 2 は, $\tilde{J}_k(x) := \sum_{j=0}^k q_j P_j(e^{-|x|}) e^{-|x|}$ を用いた偶関数に対する近似の数値計算例である . J_1 と J_2 を以下のように定義する :

$$J_1(x) = 3e^{-3x^2},$$

$$J_2(x) = 4e^{-4|x|} - 8x^2e^{-3|x|} + \frac{3x^4}{8}e^{-\frac{3|x|}{2}}.$$

近似関数 \tilde{J}_k のプロファイルが, J_1, J_2 のプロファイルに重なっていることがわかる .

4 まとめ

本テクニカルレポートでは, \mathbb{T} 上の非局所発展方程式の解が反応拡散系の解で近似できることを紹介し, さらに \mathbb{R} 上の非局所発展方程式に関しては, Jacobi の多項式を用いて, 近似する反応拡散系の導出方法の一つを提案した .

[8, 11] に報告されているように, すでに出来上がったパターンから, 積分核の定性的な形を同定することが実験的に可能である . したがって, パターン形成の問題を実際に解析したり, 予測したりしたいときは, 積分核の形状を導出して, その積分核による非局所発展方程式を反応拡散系に近似することで, 解析を進めることができる .

今後の課題として, \mathbb{R} 上の非局所発展方程式の反応拡散近似できることを示し, 近似方程式の解の安定性や現れるパターンの形状を調べる予定である . さらに, 実際の実験系への応用を念頭に, 反応拡散近似の理論を, 高次元の場合に拡張することも考えている .

参考文献

- [1] S. Amari, *Dynamics of Pattern Formation in Lateral-Inhibition Type Neural Fields*, Biol.Cybernetics, **27**, (1977) 77-87
- [2] P. W. Bates, P. C. Fife, X. Ren, X. Wang, *Traveling Waves in a Convolution Model for Phase Transitions*, Arch. Rational Mech. Anal.
- [3] P. W. Bates, A. Chmaj, *An Integrodifferential Model for Phase Transitions: Stationary Solutions in Higher Space Dimensions*, Journal of Statistical Physics, **95**, (1999) 1119-1139
- [4] P. W. Bates, G. Zhao, *Existence, uniqueness and stability of the stationary solution to a nonlocal evolution equation arising in population dispersal*, J. Math. Anal. Appl. **332**, (2007) 428-440
- [5] H. Berestycki, G. Nadin, B. Perthame, L. Ryzhik, *The non-local Fisher-KPP equation: traveling waves and steady states*, Nonlinearity, **22**, (2009) 2813-2844
- [6] T.S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Dover Publications, INC., Mineola, New York, (1978)
- [7] V. Hutson, S. Martinez, K. Mischaikow, G.T. Vickers, *The evolution of dispersal*, J. Math. Biol. **47**, (2003) 483-517
- [8] S. Kondo, *An updated kernel-based Turing model for studying the mechanisms of biological pattern formation*, J. Theor. Biol., online URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519316303630> (2016)
- [9] C. R. Laing, W. Troy, *PDE methods for nonlocal models*, SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS, **2**, (2003) 487-516
- [10] J. D. Murray, *Mathematical Biology. II. Spatial models and biomedical applications*, vol. **18** of Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 3rd ed., (2003)
- [11] A. Nakamasu, G. Takahashi, A. Kanbe, S. Kondo, *Interactions between zebrafish pigment cells responsible for the generation of Turing patterns*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **106**, 8429-8434 (2009)
- [12] H. Ninomiya, Y. Tanaka, H. Yamamoto, *Reaction, diffusion and non-local interaction*, preprint submitted to J. Math. Biol.