二相分離モデルにおける接触エネルギーの効果について

可香谷　隆 (東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻博士課程) *　†

1　導入

本講演では，界面現象に現れる表面張力に関する以下のエネルギーを扱う (物理的な背景としては [6] を参考文献として挙げる)：$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ に対し $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を境界 $\partial\Omega$ が滑らかな有界領域とする．また，$\mathcal{H}^k$ を $k(\geq 0)$ 次元のハウスドルフ測度とし，$\theta \in [0, \pi]$ を固定する．集合 $A \subset \Omega$ に対してエネルギー

$$E(A) := \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega) + \cos\theta \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \partial\Omega) \tag{1.1}$$

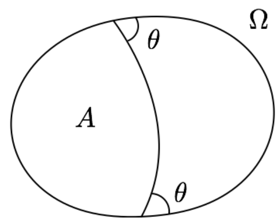

図 1: 臨界点 A の図

を定義する．$\mathcal{L}^n$ を n 次元のルベーグ測度とし，各実数 $0 < m < \mathcal{L}^n(\Omega)$ に対し集合族

$$\Sigma_m := \{A \subset \Omega : \mathcal{L}^n(A) = m\}$$

とする．$A \in \Sigma_m$ を Σ_m 上の E の臨界点で且つ A の Ω 内の境界を滑らかとすると，形式的には

$$h_A \equiv \text{constant}, \quad \langle \nu_A, \nu_\Omega \rangle = \cos\theta \quad \text{on} \quad \partial(\partial A \cap \Omega)$$

を満たす．ただし，h_A を $\partial A \cap \Omega$ の平均曲率，ν_A, ν_Ω をそれぞれ A, Ω の外向き単位法線ベクトルとする．従って，形式的にエネルギーの臨界点を考えた際に接触角 θ が現れる (図 1 参照).

一方，Chan, Hilliard[4] や Chan[3] により二層分離モデルが考察されており，これらの理論をもとに Modica[15] は上記のエネルギー (1.1) の摂動となるエネルギーとして

$$E_\varepsilon(u) := \int_\Omega \frac{\varepsilon|\nabla u|^2}{2} + \frac{W(u)}{\varepsilon}\, dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(u)\, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{1.2}$$

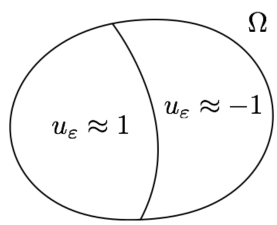

図 2: u_ε の図

を考察した．ただし，ε は十分小さな正の数，u は (ある程度滑らかな)Ω 上の関数，W は double well potential(例えば $W(s) = (1-s^2)^2$)，σ は境界 $\partial\Omega$ への接触エネルギー (例えば $\sigma'(s) = \cos\theta\sqrt{2W(s)}$ を満たすもの) とする (物理的な背景については [14, 15] を参考文献として挙げる)．上記の摂動エネルギー (1.2) を小さくするような関数 u_ε に対して，領域 Ω は $u_\varepsilon \approx 1$ の領域と $u_\varepsilon \approx -1$ の領域に分けられる (図 2 参照)．エネルギー (1.2) がエネルギー (1.1) の摂動になっているかどうかを数学的に議論するためには，(1.2) の臨界点 u_ε に対する集合 $\{u_\varepsilon \approx 1\}$ の極限と (1.1) の臨界点 A の関連性を見ることが有力な手法の一つである．Modica[15] は u_ε, A 共に最小点の場合を考察していたが，それらが共に臨界点の場合には varifold による議論がしばしば用いられ，Ω の内部や接触角が 90 度の場合が考察されている ([8, 16, 17, 19] 参照)．本講演では，一般の接触角構造を持つ臨界点に対しての収束性について考察する．

*e-mail:kagaya.t.aa@m.titech.ac.jp
†本研究は科研費 (課題番号:16J00547) の助成を受けたものである

2　記号の定義

本講演では様々な測度を用いるため，それらの記号に関する情報をここで整理する．基本的な測度論については [5]，幾何学的測度論における有界変動関数に関する測度論については [2, 5, 12]，同幾何学的測度論における varifold に関しては [1, 18] を参考文献として挙げる．

以下，$a \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して

$$B_r(a) := \{x : |x-a| < r\}$$

とする．集合 X 上のラドン測度 μ に対して，その測度の台を

$$\mathrm{spt}\mu := \{x \in X : \text{全ての } r > 0 \text{ に対して} \mu(B_r(x)) > 0\}$$

と定義する．

2.1　有界変動関数

$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．関数 $f \in L^1(U)$ が

$$\sup\left\{\int_U f\mathrm{div}\phi\, dx : \phi \in C_c^1(U;\mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1\right\} < \infty$$

を満たすとき，f を有界変動関数と言い，U 上の有界変動関数の族を $BV(U)$ で表す．特に，$\mathcal{L}^n$ 可測な集合 A に対して，A の特性関数 χ_A が U 内で有界変動関数であれば，A は U 内で finite perimeter を持つと言う．このとき，A に対する perimeter measure $|D\chi_A|$ が定義でき，任意の開集合 $B \subset\subset U$ に対して

$$|D\chi_A|(B) = \sup\left\{\int_{A\cap B} \mathrm{div}g\, dx : g \in C_c^1(B;\mathbb{R}^n), |g| \leq 1\right\}$$

を満たす．リースの表現定理 ([5, Theorem 1.38]) により，$|D\chi_A|$ 可測ベクトル値関数 $\nu_A : U \to \mathbb{R}^n$ が存在し，$|D\chi_A|$ に関してほとんど全て点で $|\nu_A| = 1$ であり，全ての $g \in C_c^1(U;\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\int_A \mathrm{div}g\, dx = \int_U \langle g, \nu_A\rangle\, d|D\chi_A| \tag{2.1}$$

が成り立つ．ν_A は $\partial^* A$ 上の一般化された外向き単位法線ベクトルと呼ばれている．ここで $\partial^* A$ は reduced boundary と呼ばれている集合であり，$x \in \mathrm{spt}|D\chi_A|$ で且つ

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\int_{B_r(x)} \nu_A\, d|D\chi_A|}{|D\chi_A|(B_r(x))}$$

が存在し，$\partial B_1(0)$ に属する点 x で構成されている．

Remark 2.1 境界が滑らかな $A \subset\subset U$ に対して発散定理より，$\tilde{\nu}_A$ を外向き単位法線ベクトルとすれば

$$\int_A \mathrm{div}\phi\, dx = \int_{\partial A} \langle g, \tilde{\nu}_A\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

が全ての $g \in C_c^1(U;\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ．従って，(2.1) における ν_A は $\tilde{\nu}_A$ と一致し，一般化された外向き単位法線ベクトルと呼ばれる理由がわかる．また，より開集合 $B \subset\subset U$ に対して

$$|D\chi_A|(B) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap B)$$

となり，B 内における A の表面積に対応していることがわかる．このとき，$\partial A = \partial^* A$ が成り立つ．

2.2 修正可能集合

集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が，$\mathcal{H}^{n-1}(M_0) = 0$ を満たす集合と $i \in \mathbb{N}$ に対して滑らかな写像 $F_i : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ が存在して，

$$M \subset M_0 \cup (\cup_{i=1}^{\infty} F_i(\mathbb{R}^{n-1}))$$

の包含関係が成り立つ時，M を countably $(n-1)$-rectifiable set と言う．

Remark 2.2 M が $\mathbb{R}^n$ 内における $n-1$ 次元部分多様体であれば，修正可能集合の定義を満たすことが確認できるため，修正可能集合は部分多様体の一般化であると言える．

2.3 varifold

$\mathbf{G}(n, n-1)$ を $\mathbb{R}^n$ 内における $n-1$ 次元部分空間の集合とする．$S \in \mathbf{G}(n, n-1)$ に対して，S を $n-1$ 次元部分空間 S への射影ともみなすことにする．自己準同型写像 $A, B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ に対して内積

$$A \cdot B := \sum_{1 \le i,j \le n} A_{ij} B_{ij}$$

として定める．開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して，直積集合 $G_{n-1}(U) := U \times \mathbf{G}(n, n-1)$ を定義する．U 内における $(n-1)$-varifold を $G_{n-1}(U)$ 上のラドン測度とし，$(n-1)$-varifold の集合を $\mathbf{V}_{n-1}(U)$ とする．$V \in \mathbf{V}_{n-1}(U)$ に対して，V の weight measure $\|V\|$ を

$$\|V\|(\phi) := \int_{G_{n-1}(U)} \phi(x)\, dV(x, S) \quad \text{for} \quad \phi \in C_c(U)$$

として定める．$\mathcal{H}^{n-1}$ 可測なで局所的に有限な測度を持つ countable $(n-1)$-rectifiable set $M \subset U$ に対して，M から自然に誘導される $(n-1)$-varifold を

$$|M|(\phi) := \int_M \phi(x, \mathrm{Tan}_x M)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \quad \text{for} \quad \phi \in C_c(G_{n-1}(U))$$

として定める．ただし，$\mathrm{Tan}_x M$ は $\mathcal{H}^{n-1}$ に関してほとんど全ての点 $x \in M$ で定義できる M の一般化された接平面とする．$V \in \mathbf{V}_{n-1}(U)$ が integral であるとは，ある $\mathcal{H}^{n-1}$ 可測なで局所的に有限な測度を持つ countable $(n-1)$-rectifiable set $M \subset U$ と自然数値を取る U 上の $\mathcal{H}^{n-1}$ 可測な関数が存在し，

$$V(\phi) = \int_M \phi(x, \mathrm{Tan}_x M)\Theta(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \quad \text{for} \quad \phi \in C_c(G_{n-1}(U))$$

を満たすことを言う．これらの integral $(n-1)$-varifold の集合を $\mathbf{IV}_{n-1}(U)$ と記述することにする．

$V \in \mathbf{V}_{n-1}(U)$ に対して第一変分を

$$\delta V(g) := \int_{G_{n-1}(U)} \nabla g(x) \cdot S\, dV(x, S) \quad \text{for} \quad g \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$$

として定める．全変動 $\|\delta V\|$ が存在し，ラドン測度であるとき，ラドン-ニコディムの定理より，$\|\delta V\|$ の $\|V\|$ に対する特異部分を $\|\delta V\|_{\mathrm{sing}}$ とすると，$\|V\|$ 可測なベクトル場 h，$\|\delta V\|$ 可測で $\|\delta V\|$ に関してほとんど全ての点で $|\nu_{\mathrm{sing}}| = 1$ を満たすベクトル場 ν_{sing}，$\|V\|(Z) = 0$ を満たすあるボレル集合 $Z \subset U$ が存在し，

$$\delta V(g) = -\int_U \langle g, h \rangle\, d\|V\| + \int_Z \langle \nu_{\mathrm{sing}}, g \rangle\, d\|\delta V\|_{\mathrm{sing}} \quad \text{for} \quad g \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n) \tag{2.2}$$

と分解できる．$h, \nu_{\mathrm{sing}}, Z$ はそれぞれ V に対する一般化された平均曲率ベクトル，co-normal ベクトル，境界と呼ぶ．

Remark 2.3 (2.2) に対して，*Remark2.1* と同様の考察を行う．$M \subset U$ が境界が滑らかな $n-1$ 次元部分多様体の場合，曲面上の発散定理より，

$$\int_M \mathrm{div}_M g \, d\mathcal{H}^{n-1} = -\int_M \langle g, h_M \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial M} \langle \nu_M, g \rangle \, d\mathcal{H}^{n-2} \quad \text{for} \quad g \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．ただし，h_M と ν_M はそれぞれ M の平均曲率ベクトル，*co-normal* ベクトルとなるため，(2.2) における $h, \nu_{\mathrm{sing}}, Z$ はそれぞれ一般化されたと言われる理由がわかる．

3　二層分離モデル

以降 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を境界が滑らかな有界領域とする．本講演では以下を仮定する．

(A1) $W \in C^\infty(\mathbb{R})$ は $W \geq 0$，ある定数 $\gamma \in (0,1)$ が存在し $|s| \geq \gamma$ に対して $W''(s) > 0$ を満たし，W は $(-1,1)$ 内に置いて局所最大点を持つとする．

(A2) $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$ は $\sigma(-1) = 0$ とある定数 $C_1 \in [0,1)$ が存在し任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $|\sigma'(s)| \leq C_1 \sqrt{2W(s)}$ を満たすとする．

(A3) $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$ を満たす数列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ に対して，$\{u_{\varepsilon_i}\}_{i=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ がある定数の列 $\{\lambda_{\varepsilon_i}\}_{i=1}^\infty \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{cases} -\varepsilon_i \Delta u_{\varepsilon_i} + \dfrac{W'(u_{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i} = \lambda_{\varepsilon_i} & \text{on} \quad \Omega, \\ \varepsilon_i \langle \nabla u_{\varepsilon_i}, \nu \rangle = -\sigma'(u_{\varepsilon_i}) & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

を満たすとする．ただし，ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルとする．

(A4) ある定数 $C > 0$ と $E_0 > 0$ が存在し，

$$\sup_i \|u_{\varepsilon_i}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C, \quad \sup_i |\lambda_{\varepsilon_i}| \leq C, \quad \sup_i E_{\varepsilon_i}(u_{\varepsilon_i}) \leq C$$

を満たすとする．

Remark 3.1 仮定 $(A3)$ は u_{ε_i} がある定数 $l \in (-|\Omega|, |\Omega|)$ に対する保存条件

$$\int_\Omega u \, dx = l$$

付きの E_{ε_i} の臨界点であることを意味している．上記の保存条件により，定数 λ_{ε_i} が導出される．

ここで，u_{ε_i} から自然に導入される varifold を定義する．定数 c_0 を

$$c_0 := \int_{-1}^1 \sqrt{2W(s)} \, ds$$

として定義する．ラドン測度 μ_{ε_i} を

$$d\mu_{\varepsilon_i} := \frac{1}{c_0} \left(\frac{\varepsilon_i |\nabla u_{\varepsilon_i}|^2}{2} + \frac{W(u_{\varepsilon_i})}{\varepsilon_i} \right) d\mathcal{L}^n \lfloor_\Omega$$

として定める．varifold $V_{\varepsilon_i} \in \mathbf{V}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ を

$$V_{\varepsilon_i}(\phi) := \int_{\{|\nabla u_{\varepsilon_i}| \neq 0\}} \phi \left(x, I - \frac{\nabla u_{\varepsilon_i}}{|\nabla u_{\varepsilon_i}|} \otimes \frac{\nabla u_{\varepsilon_i}}{|\nabla u_{\varepsilon_i}|} \right) d\mu_{\varepsilon_i}$$

として定める．

Remark 3.2 任意の定数 c に対して，等高面 $\{x \in \Omega : u_{\varepsilon_i}(x) = c\}$ が $n-1$ 次元の曲面であれば，$\nabla u_{\varepsilon_i}/|\nabla u_{\varepsilon_i}|$ はその等高面に対する単位法線ベクトルとなる *([7] 参照)*．従って，$I - \nabla u_{\varepsilon_i}/|\nabla u_{\varepsilon_i}| \otimes \nabla u_{\varepsilon_i}/|\nabla u_{\varepsilon_i}|$ は等高面に対する接平面への射影に対応している．

内部における理論は [8, 17] によって議論されており，それらの先行研究から従うことをここで述べる．

Theorem 3.3 *([8, Theorem 1])* 仮定 *(A1)–(A4)* の下で，以下の部分収束 *(*部分列は同じ記号を用いる*)* が成り立つ*:*

$$\lambda_{\varepsilon_i} \to \lambda,\ u_{\varepsilon_i} \to u \in BV(\Omega)\ a.e.,\ \mathbf{V}_{n-1}(\mathbb{R}^n) \text{ の意味で } V_{\varepsilon_i} \to V.$$

さらに，以下が成立する:

(1) $u(x) = \pm 1$ for $\mathcal{L}^n$ a.e. on Ω.

(2) $V\lfloor_{G_{n-1}(\Omega)} \in \mathbf{IV}_{n-1}(\Omega)$.

(3) $\Omega \cap \operatorname{spt}\|\partial^*\{u=1\}\| \subset \operatorname{spt}\|V\|$ であり，$\Omega \setminus \operatorname{spt}\|V\|$ 上で局所一様に $u_{\varepsilon_i} \to \pm 1$.

ここで，$M := \Omega \cap \partial^*\{u = 1\}$ とする．

Theorem 3.4 *([17, Theorem3.2])* λ, u, V, M を上記と同様のものとする．このとき，以下が成立する*:*

(a) $V\lfloor_{G_{n-1}(\Omega)} \in \mathbf{V_{n-1}(\Omega)}$ は (2.2) における $\|\delta V\|_{\mathrm{sing}} = 0$ として一般化された平均曲率 h を持つ．

(b) h は局所的に一定の平均曲率である．つまり，

$$h = \begin{cases} \frac{2\lambda}{c_0}\frac{\nabla u}{|\nabla u|} & \mathcal{H}^{n-1}\ a.e.\ on\ M, \\ 0 & \mathcal{H}^{n-1} a.e.\ on\ \operatorname{spt}\|V\| \cap \Omega \setminus .M \end{cases}$$

さらに，$\|V\|$ に対する密度関数は

$$\Theta(\|V\|, x) = \begin{cases} odd & \mathcal{H}^{n-1}\ a.e.\ on\ M, \\ even & \mathcal{H}^{n-1}\ a.e.\ on\ \operatorname{spt}\|V\| \cap \Omega \setminus M \end{cases}$$

を満たす．

(c) $\lambda \neq 0$ の場合，*(b)* における *“odd”* は *“1”* に入れ替えられる*.*

(d) $\lambda > 0$ の場合，$\mathcal{H}^{n-1}(\{u = 1\} \cap \operatorname{spt}\|V\| \cap \Omega \setminus M) = 0$ であり，$\lambda < 0$ の場合，$\mathcal{H}^{n-1}(\{u = -1\} \cap \operatorname{spt}\|V\| \cap \Omega \setminus M) = 0$ である．

以上の結果より，測度の意味で μ_{ε_i} の部分収束性も従い，収束先は $\|V\|$ であることもわかる．以降，次の条件も仮定する．

(A6) $\|V\|(\partial\Omega) = 0$.

本講演での考察対象である，二層分離モデルにおける接触角構造についての結果は以下の通りである．

Theorem 3.5 *([11]) (A1)–(A6)* の仮定する．u, V を上記の極限先のものとする．このとき，以下が成り立つ*:*

(A) ある有界変動関数 $\tilde{u} \in BV(\Omega)$ が存在し，部分列の意味での収束性

$$u_{\varepsilon_i}\lfloor_{\partial\Omega} \to \tilde{u} \ \ \mathcal{H}^{n-1}\, a.e.\ on\ \partial\Omega$$

が成り立つ．ただし，$u_{\varepsilon_i}\lfloor_{\partial\Omega}$ は u_{ε_i} の $\partial\Omega$ への制限とする．また，関数 $\tilde{u}$ は

$$\tilde{u} = \pm 1 \ \ \mathcal{H}^{n-1}\, a.e.\ on\ \partial\Omega,$$
$$\mathcal{H}^{n-1}((\partial^*\{u=\pm1\}\cap\partial\Omega)\backslash\{\tilde{u}=\pm1\}) = \mathcal{H}^{n-1}(\{\tilde{u}=\pm1\}\backslash(\partial^*\{u=\pm1\}\cap\partial\Omega)) = 0$$

を満たす．

(B) 全変動 $\|\delta V\|(\mathbb{R}^n) = \|\delta V\|(\overline{\Omega})$ は有界である．

(C) 任意の $\partial\Omega$ に対する接ベクトル場 g，つまり $\partial\Omega$ 上で $\langle g, \nu\rangle = 0$ となる $g \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ に対して

$$\delta V\lfloor_{\partial\Omega}(g) = \cos\theta \int_{\partial^*\{\tilde{u}(x)=1\}} \langle g, \tau\rangle \, d\mathcal{H}^{n-2} \tag{3.1}$$

が成り立つ．ただし，定数 $\theta \in (0, \pi)$ は

$$\theta = \frac{\sigma(1) - \sigma(-1)}{\int_{-1}^{1} \sqrt{2W(s)}\, ds}$$

を満たす定数とし，$\tau \in \mathrm{Tan}_x(\partial\Omega)$ は $\partial^*\{\tilde{u}=1\}$ 上で $\mathcal{H}^{n-2}$ に関してほとんど全ての点定義されるベクトル場であり，$\partial^*\{\tilde{u}=1\}$ の一般化された *co-normal* ベクトル場とする．

Remark 3.6 *(B)* の結果より，(2.2) の分解が適用でき，V に対する一般化された *co-normal* ベクトルが定義できる．(3.1) により，V に対する *co-normal* ベクトルと $\partial^*\{\tilde{u}=1\}$ に対する *co-normal* ベクトルとの関係性がわかり，$\partial^*\{\tilde{u}=1\}$ 上では V は $\partial\Omega$ との接触角 θ を持つことがわかり，それ以外の V の境界上，つまり $Z\backslash\partial^*\{\tilde{u}=1\}$ 上では接触角が直角になっていることがわかる．これらの考察は，全て滑らかの仮定のもとでは正しいことが *[10]* で考察されている．

参考文献

[1] W. Allard, *On the first variation of a varifold*, Ann. of Math. **95** (1975), pp 417–491.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (2000).

[3] J. W. Cahn, *Critical point wetting*, J. Chem. Phys. **66** (1977), pp 3667–3672.

[4] J. W. Cahn and J. E. Hilliard, *Free energy of a nonuniform system I. Inter facial free energy*, J. Chem. Phys. **28** (1958), pp 258–267.

[5] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Math., CRC Press (1992).

[6] R. Finn, *Equilibrium capillary surfaces*, vol. 284 of Die Grundlehren der mathematischen Wissenschafter. New York, Springer-Verlag New York Inc., 1987. xi+245 pp.

[7] Y. Giga, *Surface evolution equation: A level set approach*, Brikhäuser Basel, Monographs in Mathematics series (2006).

[8] J. Hutchinson and Y. Tonegawa, *Convergence of phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory*, Calc. Var. Partial Differential Equations **10** (2000), no. 1, pp49–84.

[9] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Chan equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Diff. Geom. **38** (1993), no. 2, pp 417–461.

[10] T. Kagaya and Y. Tonegawa, *A fixed contact angle for varifolds*, arXiv:1606.00164.

[11] T. Kagaya and Y. Tonegawa, *A singular perturbation limit of diffused interface energy with a fixed contact angle condition*, arXiv:1609.00191.

[12] F. Maggi, *Sets of finite primeter and geometric variational problems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 135. An introduction to Geometric Measure Theory. Cambridge University Press, Cambridge, (2012).

[13] M. Mizuno and Y. Tonegawa, *Convergence of the Allen-Chan equation with Neumann boundary conditions*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **47** (2015), no. 3, pp 1906–1932.

[14] L. Modica, *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rational Mech. Anal. **98** (1987), pp 123–142.

[15] L. Modica, *Gradient theory of phase transitions with boundary contact energy*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **4** (1987), no. 5, pp 487–512.

[16] P. Padilla and Y. Tonegawa, *On the convergence of stable phase transitions*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), no. 6, pp 551–579.

[17] M. Röger and Y. Tonegawa, *Convergence of phase-field approximations to the Gibbs-Thomson law*, Calc. Var. Partial Differential Equations **32** (2008), no. 1, pp 111–136.

[18] L. Simon, *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **3** (1983).

[19] Y. Tonegawa, *Domain dependent monotonicity formula for a singular perturbation problem*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), pp 69–84.