モデュラス付き高次 Chow 群に対する ホモトピー不変性の一般化について

宮﨑 弘安 (Hiroyasu Miyazaki) *

平成 29 年 1 月 24 日

概 要

数論幾何は代数的トポロジーの手法を取り入れて発展してきた．中でも特異ホモロジーの類似として Bloch により導入された高次 Chow 群は数論幾何の普遍コホモロジー理論を実現する重要な対象である．近年，空間対のホモロジー群の類似としてモデュラス付き高次 Chow 群が定義された．これは類体論の高次元化などの大きな応用を持つ．本稿の前半では通常の代数的サイクルとモチーフの理論について入門的な解説を行い，後半でモデュラス理論を紹介する．

約束

本稿を通じて k は体を表す．また，特に断らない限り，“代数多様体” という単語は “体 k 上分離的，有限型かつ同次元のスキーム” を意味することとする．

1 Chow 群と類体論

本節では古典的な研究対象である Chow 群を紹介する．

1.1 代数的サイクルと Chow 群

本稿の主役である代数的サイクルの概念を定義する．定義は拍子抜けするほど簡単である．

Definition 1.1. 代数多様体 X 上の**代数的サイクル**とは，X の既約閉部分集合の整数係数の有限形式和

$$Z = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i$$

($n \geq 1$ は自然数．$1 \leq i \leq n$ に対して $m_i \in \mathbb{Z}$，$V_i \subset X$ は既約閉部分集合）のことである．X 上の代数的サイクル全体はアーベル群をなす．これを $\mathcal{Z}(X)$ で表す．言い換えれば，$\mathcal{Z}(X)$ は X の既約閉部分集合により生成される自由アーベル群である：

$$\mathcal{Z}(X) := \mathbb{Z}\left\{\, X \text{ の既約閉部分集合} \,\right\}$$

群 $\mathcal{Z}(X)$ はあまりにも大きな群である．そこでこの群を分割する．整数 $r \geq 0$ に対し次のように定める：

$$\mathcal{Z}_r(X) := \mathbb{Z}\left\{\, X \text{ の次元 } r \text{ の既約閉部分集合} \,\right\},$$
$$\mathcal{Z}^r(X) := \mathbb{Z}\left\{\, X \text{ の余次元 } r \text{ の既約閉部分集合} \,\right\}.$$

*Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo. JSPS Research Fellow (JSPS KAKENHI Grant Number 15J08833).
E-mail address: miyazaki@ms.u-tokyo.ac.jp

当然 $\mathcal{Z}(X) = \oplus_{r\geq 0}\mathcal{Z}_r(X) = \oplus_{r\geq 0}\mathcal{Z}^r(X)$ が成り立つ．次元版と余次元版の間には関係 $\mathcal{Z}_r(X) = \mathcal{Z}^{\dim(X)-r}(X)$（ここで $\dim(X)$ は X の次元）があるのでどちらを考えてもよい．本稿では両方を用いる．以下，しばらく次元版 $\mathcal{Z}_r(X)$ を扱う．定義は適切に余次元版にも読み換えていただきたい．

Example 1.2. 代数的サイクルの最も典型的な例は**ヴェイユ因子**である．ヴェイユ因子とは余次元 1 のサイクルの群 $\mathcal{Z}^1(X) = \mathcal{Z}_{\dim(X)-1}(X)$ の元のことである．例えば X の次元が 1（すなわち曲線）であるとき，X 上の 0 でない有理関数 f（“=”正則関数の商）に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_X(f) &:= \sum_{x\in X^{(1)}} \mathrm{ord}_x(f)\{x\}\\ &\text{“}=\text{”} \sum_{x:f\text{ の零点}} (x\text{ における }f\text{ の重複度})\{x\} - \sum_{x:f\text{ の極}} (x\text{ における }f\text{ の重複度})\{x\}\end{aligned}$$

とすることで X 上のヴェイユ因子が定まる．ここで $X^{(1)}$ は余次元 1 の既約閉部分集合の全体からなる集合を表す．今の場合 $X^{(1)}$ の元は次元 0（つまり閉点）なので $\{x\}$ は閉包をとらなくても既に閉であり，その和は代数的サイクルを定める．すなわち div_X はアーベル群の写像

$$k(X)^\times := \left\{ X\text{ 上の }0\text{ でない有理関数} \right\} \xrightarrow{\mathrm{div}_X} \mathcal{Z}^1(X) = \mathcal{Z}_0(X)$$

を定める．一般の次元の多様体 X に対しても X の有理関数の概念が定まり，写像

$$k(X)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}_X} \mathcal{Z}^1(X) = \mathcal{Z}_{\dim(X)-1}(X)$$

を定義することができる．これを X の**因子写像**と呼ぶ．

さて，$\mathcal{Z}_r(X)$ もまだ十分に大きすぎるので，これを適切な同値関係で割って比較的小さな群にするのが普通である．ここでは次の同値関係を考える．

Definition 1.3. 整数 $r \geq 0$ と（既約）代数多様体 X に対し，代数的サイクル $Z, W \in \mathcal{Z}^r(X)$ が**有理同値**であるとは，

$$Z - W \in \mathcal{Z}_r(X)_{\mathrm{rat}} := \mathrm{Image}\left[\bigoplus_{T\in X_{(r+1)}} k(T)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}_T} \bigoplus_{T\in X_{(r+1)}} \mathcal{Z}_r(T) \subset \mathcal{Z}_r(X)\right]$$

が成り立つことである．ここで $X_{(r+1)} := \left\{ X\text{ の次元 }r+1\text{ の閉部分集合} \right\}$．代数的サイクルの群 $\mathcal{Z}_r(X)$ を有理同値で割って得られる群を X の **(r 次)Chow 群**と呼ぶ：

$$\mathrm{CH}_r(X) := \mathcal{Z}_r(X)/\mathcal{Z}_r(X)_{\mathrm{rat}}.$$

また，余次元版を $\mathrm{CH}^r(X) := \mathrm{CH}_{\dim(X)-r}(X)$ で定める．

1.2 類体論との関係

Chow 群の研究の歴史は古く，これまでに様々な結果が知られている．それら全てを本稿で紹介することは不可能である．ここでは整数論との関係について紹介する．ここで述べる事柄に関しては齋藤秀司氏による詳細な解説 [11] があるので，興味を持たれた方は参照されたい．

古典的な代数的整数論の金字塔である**類体論**は，大雑把に述べれば「代数体 K の（絶対）ガロア群のアーベル化を K に内在的な情報で記述する」理論である．ところで，代数体 K は，その整数環 $\mathscr{O}_K$ を関数環にもつ 1 次元代数多様体 $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$ の有理関数体 $k(X)$ とみなすことができる．この同一視により K の有限次ガロア拡大を記述することは X のガロア拡大と呼ばれるある種の射 $X' \to X$ を記述することに対応する．一般の次元の代数多様体 X に対してもガロア拡大 $X' \to X$ の概念が定義され，それを記述するエ

タール基本群 $\pi_1(X)$ がガロア群の一般化として定義される．エタール基本群のアーベル化 $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ を記述することは古典的な類体論の高次元化に対応する：

$$\text{高次元類体論}:=\text{「}\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)\text{ を }X\text{ に内在的な情報で記述する理論」}$$

次の定理は，Chow 群を用いて高次元類体論をある程度，展開できることを示している．

Theorem 1.4 (高次元不分岐類体論). X を有限体 $\mathbb{F}_q$ または整数環上の射影的かつ正則（≒ 滑らか）な多様体とする．簡単のため, $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}) \to X$ という射が存在しないと仮定する．このとき自然な単射 $\mathrm{CH}_0(X) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ が存在する．これは X の関数体 $k(X)$ の標数が 0 ならば同型である（正標数でも像の記述が可能）．

実は，不分岐な拡大だけではなく順分岐な拡大についても，Suslin ホモロジーと呼ばれる群 $\mathrm{H}_0^{\mathrm{Sing}}$ でコントロールできることが知られている（Schmidt-Spießによる結果 [12]）．Suslin ホモロジーの定義も代数的サイクルを用いてなされ，自然な全射 $\mathrm{H}_0^{\mathrm{Sing}} \to \mathrm{CH}_0$ が存在する．

では，順分岐とも限らない分岐（これを**暴分岐**という）の情報も Chow 群や Suslin ホモロジーを用いて捉えられるだろうか？ ここには本質的な困難がある．実際，Chow 群や Suslin ホモロジーは，**$\mathbb{A}^1$-ホモトピー不変性**とよばれる性質

$$\mathrm{CH}^r(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}^r(X \times \mathbb{A}^1)$$

を満たす．この写像は第 1 射影 $\mathrm{pr}_1 : X \times \mathbb{A}^1 \to X$ による代数的サイクルの引き戻しによって定義される．（既約閉部分集合 $V \subset X$ を $V \times \mathbb{A}^1 \subset X \times \mathbb{A}^1$ に送る写像．）一方で，エタール基本群のアーベル化は $\mathbb{A}^1$-ホモトピー不変性を満たさないことが知られている．すなわち，ガロア拡大の情報は，$\mathbb{A}^1$-ホモトピー不変性を満たすデータでは記述し尽くすことができない！ このことが後半で述べるモデュラス理論を導入する動機のひとつになっている．

1.3 Chow 群の高次化

上で述べたような問題があるにせよ，Chow 群自体は非常に重要な対象である．$\mathbb{A}^1$-ホモトピー不変性は，代数的トポロジーにおけるホモトピー不変性の類似である．この観点からすると，Chow 群にもなんらかの（コ）ホモロジー的な解釈が存在すると期待するのは自然である．実は，Chow 群は位相的多様体の 0 次特異（コ）ホモロジー群の非常に素直な類似物とみなすことができる（Bloch の構成 [2]）．

位相的多様体 T に対し，T の特異ホモロジー群は次の複体のホモロジー群として定義されていた：

$$\cdots \to \mathbb{Z}\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Delta^q, T) \to \mathbb{Z}\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Delta^{q-1}, T) \to \cdots \to \mathbb{Z}\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Delta^1, T) \to \mathbb{Z}\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Delta^0, T) \to 0.$$

ここで Δ^q は q-次単体を表し，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}(\Delta^q,T)}$ は Δ^q から T への連続写像の集合を表す．アーベル群の写像 $\mathbb{Z}\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Delta^q, T) \to \mathbb{Z}\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Delta^{q-1}, T)$ は単体の面への埋め込み $\Delta^{q-1} \hookrightarrow \Delta^q$ による連続写像の引き戻しの交代和として定義される．

そこで，代数的多様体 X に対して類似の複体を定義しよう．整数 $r \geq 0$ を固定する．このとき次の “複体” を考えたい：

$$\text{“}\cdots \to \mathcal{Z}^r(\mathbb{A}^q \times X) \to \mathcal{Z}^r(\mathbb{A}^{q-1} \times X) \to \cdots \to \mathcal{Z}^r(\mathbb{A}^1 \times X) \to \mathcal{Z}^r(\Delta^0 \times X) \to 0.\text{”}$$

ここで $\mathbb{A}^q = \prod_{i=1}^q \mathbb{A}^1$ は q-次元アファイン空間を表し，写像 $\mathcal{Z}^r(\mathbb{A}^q \times X) \to \mathcal{Z}^r(\mathbb{A}^{q-1} \times X)$ は面への埋め込み

$$\iota_i^\epsilon : \mathbb{A}^{q-1} \times X \cong (\mathbb{A}^i \times \{\epsilon\} \times \mathbb{A}^{q-1-i}) \times X \hookrightarrow \mathbb{A}^i \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{q-1-i} \times X = \mathbb{A}^q \times X$$

（ここで $i = 0, \ldots, q-1$ かつ $\epsilon \in \{0,1\}$）による代数的サイクルの引き戻しとして “定義される”．

例えば，$r = \dim X$ であれば任意の射 $f : \mathbb{A}^q \to X$ のグラフ Γ_f は $\mathcal{Z}^r(\mathbb{A}^q \times X)$ の元とみなせる．この意味でこの複体は特異ホモロジーを定義する複体の類似になっている．単純に代数多様体の射の集合 $\mathrm{Hom}(\mathbb{A}^q, X)$

を考えることももちろん可能だが，代数多様体の射は連続写像よりもはるかに強い条件を要請されているので，射の数が非常に少なくなってしまい，ホモロジー理論として上手く機能しない．

代数的サイクルの引き戻しは，代数的サイクルの既約成分どうしの交わりをとり，交わりの既約成分に適切な係数を付与してサイクルとみなすことで定義される (精密な定義は本稿では不要なので割愛する)．……ここで注意深い読者は次のことに気づくだろう：「余次元 r の既約閉部分集合 $V \subset \Delta^q \times X$ を埋め込み $\mathbb{A}^{q-1} \times X \hookrightarrow \mathbb{A}^q \times X$ により "引き戻す" というが，仮に V が $\mathbb{A}^{q-1} \times X$ の像に完全に含まれている場合，像と V の交わりの次元が下がらないので引き戻しを定義できない」．これは重要な指摘であり，この点が代数的サイクルの理論を繊細なものにしている．引き戻しが well-defined になるようにするために，部分群 $\underline{z}^r(X,q) \subset \mathcal{Z}^r(\mathbb{A}^q \times X)$ を以下のように定義する：

$$\underline{z}^r(X,q) := \mathbb{Z}\left\{ \begin{array}{l} \text{余次元 } r \text{ の既約閉部分集合 } V \subset \mathbb{A}^q \times X \text{ であって，任} \\ \text{意の\underline{面} } F \subset \mathbb{A}^q \text{ に対し } F \times X \text{ と\underline{正しく交わる}もの} \end{array} \right\}.$$

ここで，$\mathbb{A}^q$ の**面（face）**とは，ι_i^ϵ の像の任意個の共通部分である．例えば $\mathbb{A}^2$ の faces の集合は

$$\left\{ \mathbb{A}^2, \mathbb{A}^1 \times \{0\}, \mathbb{A}^1 \times \{1\}, \{0\} \times \mathbb{A}^1, \{1\} \times \mathbb{A}^1, \{0\} \times \{0\}, \{0\} \times \{1\}, \{1\} \times \{0\}, \{1\} \times \{1\}, \emptyset \right\}.$$

また，代数多様体 Y の既約閉部分集合 $A, B \subset Y$ が**正しく交わる**とは，次の不等式が成立することである：

$$\mathrm{codim}_Y(A \cap B) \geq \mathrm{codim}_Y(A) + \mathrm{codim}_Y(B).$$

大雑把に言えば，余次元 r の集合 A で余次元 s の集合 B を "切断" すると余次元 $r+s$ 以上の集合になることを保証する条件である．これにより代数的サイクルの引き戻し写像が問題なく定義され，次の well-defined な複体を得る：

$$\cdots \to \underline{z}^r(X,q) \to \underline{z}^r(X,q-1) \to \cdots \to \underline{z}^r(X,1) \to \underline{z}^r(X,0) \to 0.$$

これを**サイクル複体**と呼ぶ．

上の定義で，Δ^q の代わりに $\mathbb{A}^q$ を用いていることが気になる読者もおられよう．代数幾何学的 q-次単体 $\Delta^q = \mathrm{Spec}(k[x_0, \dots, x_q]/(\sum_{i=0}^q x_i - 1)$ を用いても同様の構成が可能であり，Bloch によるオリジナルの構成では Δ^q を用いている．本稿で $\mathbb{A}^q$ を用いる理由は後半で定義するモデュラス付きサイクル複体との整合性を保つためである．

Δ^q を用いる定義と同値な定義を与えるためには，サイクル複体の商を取る必要がある ([3])．様々な射影 $\mathbb{A}^q = \mathbb{A}^i \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^{q-1-i} \to \mathbb{A}^i \times \mathbb{A}^{q-1-i} = \mathbb{A}^{q-1}$ $(i = 0, \dots, q-1)$ によるサイクルの引き戻しの像が生成する部分群 $\underline{z}^r(X,q)_{\mathrm{degn}} \subset \underline{z}^r(X,q)$ を**退化サイクルの群**と呼ぶ．アーベル群の商

$$z^r(X,q) := \underline{z}^r(X,q)/\underline{z}^r(X,q)_{\mathrm{degn}}$$

は再び複体 $z^r(X,*)$ をなす．これもサイクル複体と呼ぶことにする．

Definition 1.5. 代数多様体 X の余次元 r の q-次**高次 Chow 群**を，サイクル複体の q-次ホモロジー群

$$\mathrm{CH}^r(X,q) := \mathrm{H}_q(z^r(X,q))$$

として定義する．

非自明だがそれほど難しくない議論により次がわかる．

Proposition 1.6. 任意の代数多様体 X に対し，標準的な同型 $\mathrm{CH}^r(X,0) \cong \mathrm{CH}^r(X)$ が存在する．

この命題により，Chow 群が高次 Chow 群という一種の（コ）ホモロジー理論の 0 次部分として再解釈されたことになる．高次 Chow 群も $\mathbb{A}^1$-ホモトピー不変性を満たす．

Theorem 1.7. *([2, Theorem 2.1])* 任意の代数多様体 X と任意の自然数 $q, r \geq 0$ に対し，第 1 射影による引き戻し写像

$$\mathrm{CH}^r(X,q) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*} \mathrm{CH}^r(X \times \mathbb{A}^1, q)$$

は同型である．

1.4 モチーフ理論との関係

高次 Chow 群は特異ホモロジー群の類似物として導入されたが，その後の研究によって，これが絶妙な定義であることが明らかになった．中でも重要なのは**モチーフ理論**からの解釈である．モチーフが何を指すかについては諸説あり，未だ確定した見解はないが，応用上最も満足できるもののひとつは Voevodsky の手によるものであろう．Voevodsky はモチーフの圏と呼ばれる三角圏 $\mathbf{DM}$ およびモチーフ関手 $\mathcal{M}: \mathbf{Sm} \to \mathbf{DM}$ を構成した．l-進エタールコホモロジーや Betti コホモロジーといった重要なコホモロジー関手は $\mathbf{DM}$ を経由することが知られている．この意味でモチーフは "普遍的な" コホモロジー理論であると期待されている．$\mathbf{DM}$ は次のように構成される（詳細は [7] などを参照）：

$$\mathbf{DM} = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{NST})}{(\mathbb{A}^1\text{-homotopy invariance})}$$

$\mathbf{NST}$ は **transfer 付きニスネヴィッチ層**のなすアーベル圏，$\mathbf{D}(\mathbf{NST})$ はその導来圏を表す．ここで，transfer 付き前層 (presheaves with transfers : $\mathbf{PST}$) は**代数的対応の圏** $\mathbf{Cor}$ 上のアーベル群の前層である．圏 $\mathbf{Cor}$ の対象は $\mathbf{Sm}$ の対象と同じであり，射の集合 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Cor}}(X, Y), X, Y \in \mathbf{Sm}$ は次で定義される（射の合成の定義は省略する）：

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Cor}}(X, Y) = \mathbb{Z}\left\{ \begin{array}{l} \text{既約閉部分集合 } V \subset X \times Y \text{ であって，合成射 } V \hookrightarrow X \times Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X \\ \text{が } V \text{ から } X \text{ のある既約成分への有限全射であるもの} \end{array} \right\}.$$

代数多様体の射 $f: X \to Y$ に対してグラフ $\Gamma_f \subset X \times Y$ を対応させることにより自然な関手 $\mathbf{Sm} \to \mathbf{Cor}$ を得る．$\mathbf{NST}$ は前層 $F \in \mathbf{PST}$ であって合成関手 $F|_{\mathbf{Sm}} : \mathbf{Sm}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cor}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Ab}$ がニスネヴィッチ位相について層であるもので生成される $\mathbf{PST}$ の充満部分圏として定義される．ここでニスネヴィッチ位相はザリスキ位相より強くエタール位相より弱い位相である．米田の定理により自然な関手 $\mathbf{Sm} \to \mathbf{Cor} \xrightarrow{\text{Yoneda}} \mathbf{PST}$ が定まるが，この像は $\mathbf{NST}$ に入ることが証明できる．よって $\widetilde{\mathcal{M}} : \mathbf{Sm} \to \mathbf{NST} \to \mathbf{D}(\mathbf{NST})$ を得る．ここで 2 番目の射は層 F に対し 0 次に集中した複体 $F[0]$ を対応させる関手である．

モチーフの圏 $\mathbf{DM}$ は，第 1 射影から誘導される射 $\widetilde{\mathcal{M}}(X \times \mathbb{A}^1) \to \widetilde{\mathcal{M}}(X)$ が任意の $X \in \mathbf{Sm}$ に対して可逆になるように $\mathbf{D}(\mathbf{NST})$ を三角圏として割って得られる圏である．誘導される関手 $\mathcal{M} : \mathbf{Sm} \to \mathbf{DM}$ をモチーフ関手といい，$\mathcal{M}(X)$ を X の**モチーフ**という．次の定理は，モチーフの情報は高次 Chow 群により捉えられることを主張する．

Theorem 1.8. *(Voevodsky, Suslin, Friedlander, ... [7])* X, Y を滑らかな代数多様体とし，X が射影的であるとする（後者の仮定は主張を簡単にするためのものである）．このとき任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し，標準的な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathcal{M}(X)[i], \mathcal{M}(Y)) \cong \mathrm{CH}^{\dim X}(X \times Y, i)$$

が存在する．ここで $\mathcal{M}(X)[i]$ は三角圏 $\mathbf{DM}$ の中での $\mathcal{M}(X)$ の i 次シフトを表す．

左辺は層のコホモロジー理論から産まれる対象であるのに対し，左辺は具体的な複体のホモロジーとして定まる対象である．この同型は，２つの全く異なる世界を結びつけるという意味で驚異的な結果である．

2 モデュラス理論

1.2 節で述べたように，$\mathbb{A}^1$-ホモトピー不変性を満たす群では代数多様体の数論的な情報を十分に捉えられない．本節では，Binda-齋藤により導入された，Bloch の高次 Chow 群の一般化である**モデュラス付き高次 Chow 群**を定義する．これは $\mathbb{A}^1$-ホモトピー不変性を満たさない代わりにエタール基本群の情報をより深く捉えられる対象である．また，ホモトピー不変性をある意味で一般化した性質が成り立つという筆者の最近の結果と，その応用についても述べる．

2.1 モデュラス付き高次 Chow 群

さっそくモデュラス付き高次 Chow 群の定義を与えよう ([1])．モデュラス付き高次 Chow 群は以下で定義するモデュラス対と呼ばれるデータに対して定まるアーベル群である．

Definition 2.1. 代数多様体 $\overline{X}$ と $\overline{X}$ 上のカルティエ因子 X^∞ の組 $\mathscr{X} = (\overline{X}, X^\infty)$ を**モデュラス対**という．X^∞ の台 $|X^\infty|$ の補集合 $\mathscr{X}^\circ := \overline{X} \setminus |X^\infty|$ を $\mathscr{X}$ の**内部**という．また，X^∞ を $\mathscr{X}$ の**モデュラス因子**と呼ぶ．モデュラス因子が有効カルティエ因子であるようなモデュラス対を**有効モデュラス対**と呼ぶ．

Remark 2.2. (1) 通常，有効モデュラス対のことを単にモデュラス対と呼ぶ．本稿では，モデュラス因子 X^∞ が有効でない場合も扱う必要があるため，区別のために有効モデュラス対という用語を導入した．他の文献を読む際には注意されたい．

(2) 代数多様体 X 上のカルティエ因子とは，X の開被覆 $X = \cup_{i\in I} U_i$ および各 U_i 上で定義される有理関数 f_i のデータ $(U_i, f_i)_{i\in I}$ であって，任意の $i, j \in I$ に対し $f_i|_{U_i\cap U_j}/f_j|_{U_i\cap U_j}$ が $U_i \cap U_j$ 上の可逆関数であるようなものをいう．有理関数の掛け算，割り算によって，カルティエ因子（の同型類）全体の集合にアーベル群の構造が定まる．有理関数 f_i がすべて正則な場合，カルティエ因子は有効であるという．X 上のカルティエ因子 D, E に対し，

$$D \leq E \Leftrightarrow \ E - D \text{ が有効}$$

と定義する．カルティエ因子の台とは，f_i がその近傍で可逆でないような点のなす閉集合である．

(3) カルティエ因子はヴェイユ因子とは異なるが類似の概念である．滑らかな代数多様体上では両概念は一致する（有理関数の零点と極が Weil 因子と対応する）．以下では専らカルティエ因子を用いるが，これはカルティエ因子の方が代数多様体の射について引き戻しやすいという技術的な理由による．代数幾何学に不慣れな読者はこの違いをあまり意識しなくても構わないが，ヴェイユ因子とは微妙な違いがあることを認識しておいてもらいたい．

モデュラス対 $\mathscr{X}$ と整数 $r \geq 0$ に対し，**モデュラス付きサイクル複体** $\underline{z}^r(\mathscr{X}, *)$ を定義したい．そこで任意の整数 $q \geq 0$ に対し，$\underline{z}^r(\mathscr{X}^\circ, q)$ の部分アーベル群 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, q)$ を以下のように定義する：

$$\underline{z}^r(\mathscr{X}, q) = \mathbb{Z}\left\{ \begin{array}{l} \text{余次元 } r \text{ の既約閉部分集合 } V \subset \mathscr{X}^\circ \times \mathbb{A}^q \text{ であって，任意の face } F \subset \mathbb{A}^q \\ \text{に対し } V \text{ は } \mathscr{X}^\circ \times F \text{ と正しく交わり，かつ，}\underline{\text{条件 } (*)} \text{ を満たす} \end{array} \right\}$$

ここで，条件 $(*)$ は**モデュラス条件**と呼ばれる以下の条件である．$\mathbb{P}^1$ を射影直線とする．また，任意の自然数 $q \geq 1$ に対し，$\mathbb{A}^q$ を $(\mathbb{P}^1)^q$ の開部分集合 $(\mathbb{P}^1 - \{\infty\})^q$ と同一視する．また，任意の代数多様体 T に対し，$T^0 := \mathrm{Spec}(k) = \mathrm{pt}$ と約束する．

$(*)$ $\overline{V}$ を V の $\overline{X} \times (\mathbb{P}^1)^q$ における閉包とし，$\overline{V}^N \to \overline{V}$ を正規化とする．合成写像 $\overline{V}^N \to \overline{V} \hookrightarrow \overline{X} \times (\mathbb{P}^1)^q$ を φ と書く．このときカルティエ因子の引き戻し $\varphi^*(X^\infty \times (\mathbb{P}^1)^q)$ と $\varphi^*(\overline{X} \times F_q)$ を考えると，不等式

$$\varphi^*(X^\infty \times (\mathbb{P}^1)^q) \leq \varphi^*(\overline{X} \times F_q)$$

が成り立つ．ここで F_q は $(\mathbb{P}^1)^q$ 上の有効カルティエ因子 $\sum_{i=0}^{q-1} (\mathbb{P}^1)^i \times \{\infty\} \times (\mathbb{P}^1)^{q-1-i}$ を表す．

X^∞ が大きくなるほどモデュラス条件は厳しくなることに注意する．また，条件 $(*)$ を開集合 $\varphi^*(\overline{X} \times \mathbb{A}^q)$ に制限することで次の条件を得る：

$(*)'$ 条件 $(*)$ と同じ記号のもとで

$$\varphi^*(X^\infty \times \mathbb{A}^q) \leq 0$$

が成り立つ．これを **naïve なモデュラス条件**と呼ぶ．

Remark 2.3. $X^{\infty} \geq 0$（有効）ならば，$(*)' \Leftrightarrow V$ の $\overline{X} \times \mathbb{A}^q$ における閉包は $|X^{\infty}| \times \mathbb{A}^q$ と交わらない．

任意の整数 $q \geq 0$ に対し，部分アーベル群 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, q)^{\mathrm{nai}} \subset \underline{z}^r(\mathscr{X}^{\circ}, q)$ を，$\underline{z}^r(\mathscr{X}, q)$ の定義において条件 $(*)$ を $(*)'$ で置き換えて得られる群として定義する．定義より $\underline{z}^r(\mathscr{X}, q) \subset \underline{z}^r(\mathscr{X}, q)^{\mathrm{nai}} \subset \underline{z}^r(\mathscr{X}^{\circ}, q)$．このとき，サイクル複体の微分写像 $\underline{z}^r(\mathscr{X}^{\circ}, q) \to \underline{z}^r(\mathscr{X}^{\circ}, q-1)$ は，部分群の間の写像を誘導することが確かめられる：

$$\begin{tikzcd}
\underline{z}^r(\mathscr{X}, q) \arrow[r] \arrow[d, "\exists!"'] & \underline{z}^r(\mathscr{X}, q)^{\mathrm{nai}} \arrow[r] \arrow[d, "\exists!"'] & \underline{z}^r(\mathscr{X}^{\circ}, q) \arrow[d] \\
\underline{z}^r(\mathscr{X}, q-1) \arrow[r] & \underline{z}^r(\mathscr{X}, q-1)^{\mathrm{nai}} \arrow[r] & \underline{z}^r(\mathscr{X}^{\circ}, q-1).
\end{tikzcd}$$

これにより，サイクル複体の部分複体の列

$$\underline{z}^r(\mathscr{X}, *) \subset \underline{z}^r(\mathscr{X}, *)^{\mathrm{nai}} \subset \underline{z}^r(\mathscr{X}^{\circ}, *)$$

を得る．サイクル複体の場合と同様にして，退化サイクルの群 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, q)_{\mathrm{degn}}, \underline{z}^r(\mathscr{X}, q)^{\mathrm{nai}}_{\mathrm{degn}}$ が定まり，これらによる商を考えることで再び部分複体の列

$$z^r(\mathscr{X}, *) \subset z^r(\mathscr{X}, *)^{\mathrm{nai}} \subset z^r(\mathscr{X}^{\circ}, *)$$

を得る．$z^r(\mathscr{X}, *)$ を**モデュラス付きサイクル複体**といい，$z^r(\mathscr{X}, *)^{\mathrm{nai}}$ を **naïve なモデュラス付きサイクル複体**という．これらの q 次ホモロジー群をそれぞれ $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q)$，$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q)^{\mathrm{nai}}$ と書き，**モデュラス付き高次 Chow 群，naïve なモデュラス付き高次 Chow 群**という．

Remark 2.4. [1] では，モデュラス付き高次 Chow 群は有効モデュラス対についてのみ定義されている．ここでは [8] に従い，任意のモデュラス対について定義を拡張している．また，$X^{\infty} = 0$ のとき $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) = \mathrm{CH}^r(\overline{X}, q)$ となり，Bloch の高次 Chow 群を特別な場合として含んでいる．

2.2 Kerz-齋藤の高次元類体論

$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}) := \mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, 0)$ を**モデュラス付き Chow 群**という．Kerz-齋藤はモデュラス付き Chow 群を用いて有限体上の代数多様体に対する高次元類体論を展開した：

Theorem 2.5 (Kerz-齋藤 ([6])，高次元類体論)**.** 基礎体 k が標数が 2 と異なる有限体であると仮定する．U を k 上の滑らかな代数多様体とする．さらに，開うめこみ $U \subset X$ であって，X が正規かつ固有であり，かつ補集合 $X \setminus U$ が X 上の有効カルティエ因子の台に等しいものが存在すると仮定する（“X は U のコンパクト化”）．このとき，アーベル位相群の同型

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(U)^0 \cong \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{CH}_0(X|nD)^0$$

が存在する．ここで $\pi_1^{\mathrm{ab}}(U)^0 := \mathrm{Ker}[\pi_1^{\mathrm{ab}}(U) \xrightarrow{f_*} \pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathrm{Spec}(k))], \mathrm{CH}_0(X|nD)^0 := \mathrm{Ker}[\mathrm{CH}_0(X|nD) \to \mathrm{CH}_0(U) \xrightarrow{\deg} \mathrm{CH}_0(\mathrm{Spec}(k))]$. ただし $f : U \to \mathrm{Spec}(k)$ は構造射．

モデュラス因子 D を考えることにより，定理 1.4 と比較して，かなり一般的な状況でエタール基本群を記述できるようになっていることがわかる．

2.3 加法的対象の記述

モデュラス付き高次 Chow 群は，高次 Chow 群が捉えられなかった加法的な対象を記述することもできる．

Definition 2.6. 代数多様体 X と整数 $r \geq 0$ および $q, m \geq 1$ に対し，

$$\mathrm{TCH}^r(X, q; m) := \mathrm{CH}^r(X \times \mathbb{A}^1 | m(X \times \{0\}), q-1)$$

を**加法的高次 Chow 群**という（$m(X \times \{0\})$ は $X \times \mathbb{A}^1$ 上の有効カルティエ因子）.

加法的高次 Chow 群は，モデュラス付き高次 Chow 群が導入される以前に Bloch と Esnault により定義され研究されてきた ([4])．歴史的な順序を鑑みれば，モデュラス付き高次 Chow 群は，Bloch の高次 Chow 群と加法的高次 Chow 群の共通の一般化であるといえる．加法的な対象の典型例であるヴィット環やドラーム複体は，加法的高次チャウ群で記述可能である.

Theorem 2.7 (Rülling ([10])). $X = \mathrm{Spec}(k)$ ならば，任意の $r \geq 0$ および $q, m \geq 1$ に対しアーベル群の同型

$$\mathrm{TCH}^r(X, q; m) \cong \mathbb{W}_m \Omega_k^{q-1}$$

が存在する．ここで右辺は Hesselholt と Madsen により定義された truncated big de Rham-Witt 複体である.

2.4 モデュラス付きモチーフ理論

モデュラス付き高次 Chow 群の導入に触発される形で，Kahn-齋藤-山崎は，モチーフ理論そのものもモデュラス付きのバージョンに拡張されるべきだと考えた：

$$\begin{tikzcd} \text{高次 Chow 群} \arrow[r, "\text{Hom を記述}"] \arrow[d, "\text{一般化}"'] & \text{モチーフの圏} \arrow[d] \\ \text{モデュラス付き高次 Chow 群} \arrow[r] & \boxed{??????????} \end{tikzcd}$$

彼らは, モチーフの圏 **DM** を拡張する圏として**モデュラス付きモチーフの圏**と呼ばれる三角圏 **MDM** を構成した ([5])．有効モデュラス対の圏 **MP** およびモチーフ関手 $\mathbf{MP} \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathbf{MDM}$ が定義され, $\mathcal{M}(\mathscr{X})$ は $\mathscr{X}$ のモチーフと呼ばれる．**DM** と **MDM** の重要な違いは, **DM** においてはホモトピー不変性 $\mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(X \times \mathbb{A}^1)$ が成り立つのに対し, **MDM** では成り立たない点である．そのかわり, **MDM** では**キューブ不変性**と呼ばれる関係 $\mathcal{M}(\mathscr{X}) \cong \mathcal{M}(\mathscr{X} \otimes \overline{\square})$ が成り立つ．ここで $\overline{\square} = (\mathbb{P}^1, \infty)$ は射影直線 $\mathbb{P}^1$ と無限遠点からなる有効モデュラス対である．一般に, モデュラス対 $\mathscr{X} = (X, D)$ と $\mathscr{Y} = (Y, E)$ の**テンソル積**は $\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y} = (X \times Y, D \times Y + X \times E)$ で定義される.

モデュラス付きモチーフの理論は発展途上であるが，Voevodsky の圏 **DM** に関する多くの定理が **MDM** に対し一般化できることがわかっている.

2.5 主結果：ホモトピー不変性の一般化と応用

最後に，筆者自身の最近の結果について述べる．[8] または概説論文 [9] も参照していただきたい．上の図式を眺めていると，次の予想へと導かれる.

Conjecture 2.8. モデュラス付きモチーフの圏 **MDM** の射の集合のなす群は，モデュラス付き高次 Chow 群で記述可能である．すなわち，定理 1.8 のモデュラス版が成り立つ.

次の定理はこの予想の成立をある意味で支持するものである：

Theorem 2.9. k を任意の体とし，$\mathscr{X}$ を k 上のモデュラス対とする．このとき，任意の整数 $r, q \geq 0$ に対し，キューブ不変性

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-1)}, q).$$

が成り立つ．ここで $\overline{\square}^{(-1)} = (\mathbb{P}^1, -\infty)$ は射影直線とカルティエ因子の組からなるモデュラス対であり，**負のキューブ**と呼ばれる．一般に，モデュラス対 $\mathscr{Y} = (Y, E)$ と整数 m に対し $\mathscr{Y}^{(m)} := (Y, mE)$ とおく．

ここで，無限遠点の符号が反転していることに注意する．この同型の右辺が意味を持つようにするために，有効とは限らない因子についてもモデュラス付き高次 Chow 群を定義する必要があった．符号の反転が起こる理由は，モデュラス付きモチーフとモデュラス付き高次 Chow 群では，それぞれが満たす関手性に違いがあることによる．負の符号が出て来ることは以下の意味で自然である．実際，Voevodsky の定理 1.8 の証明で Hom 集合を計算する際，途中で “$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(X, Y \times Z)$” のような書き換えを行う場面がある（本当は次数シフトや Tate ひねりを施す必要があるが細かい点は無視しよう）．この議論をモデュラス付きに一般化しようとすると “$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathscr{X} \otimes \mathscr{Y}, \mathscr{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}^{(-1)} \otimes \mathscr{Z})$” としなければならない（上記のモデュラス対の射の定義を参照）．符号の反転はこの現象から自然に生じる．

定理 2.9 の証明の鍵となるのは以下の 2 つの補題である．まず，モデュラス付きサイクル複体 $z^r(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-1)}, *)$ の部分複体 $z^r_{\{0,1\}}(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-1)}, *)$ を，閉うめこみ $i_\epsilon : \mathscr{X}^\circ \cong \mathscr{X}^\circ \times \{\epsilon\} \hookrightarrow \mathscr{X}^\circ \times \mathbb{A}^1$ $(\epsilon = 0, 1 \in \mathbb{A}^1)$ に沿った代数的サイクルの引き戻し $i_\epsilon^* : z^r_{\{0,1\}}(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-1)}, *) \to z^r(\mathscr{X}, *)$ が well-defined になるような最大の部分複体として定義する．

Lemma 2.10 (移動補題)**.** 包含写像 $z^r_{\{0,1\}}(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-1)}, *) \hookrightarrow z^r(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-1)}, *)$ は複体の擬同型である．

Lemma 2.11 (剛性補題)**.** 複体の写像 $i_0^*, i_1^* : z^r_{\{0,1\}}(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-1)}, *) \to z^r(\mathscr{X}, *)$ はホモトピックである．

剛性補題は比較的簡単だが，移動補題の証明は非常に複雑である．この 2 つの補題からキューブ不変性は形式的な議論によって従う（詳細は [2] または [8] を参照）．

また，このキューブ不変性（の証明）の応用として，モデュラス付き高次 Chow 群の構造に関する結果が得られる．

Theorem 2.12. k を標数 $p > 0$ の体とする．このとき k 上の任意のモデュラス対 $\mathscr{X}$ と整数 $r, q \geq 0$ に対し，標準的な同型

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \cong \mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q)^{\mathrm{nai}} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$$

が存在し，左辺はホモトピー不変性 $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \cong \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \otimes \mathbb{A}^1, q)$ を満たす（ここで $\mathbb{A}^1 = (\mathbb{A}^1, \emptyset)$ とみなす）．さらに，$\mathscr{X} = (X, D)$ が有効モデュラス対ならば，両辺はモデュラス因子 D の重複度に依らず定まる．

この結果は，モデュラス付き高次 Chow 群の最も興味深い部分は p 冪ねじれ部分群であることを示唆する．因子が有効な場合に naïve なモデュラス付き高次 Chow 群が重複度に依存しないことは，naïve なモデュラス条件の定義から自明である．同型性の証明の戦略は，まず左辺のホモトピー不変性を示す．次に $z^r(\mathscr{X}, *)$ と $z^r(\mathscr{X}, *)^{\mathrm{nai}}$ を融合したようなうまい 2 重複体 $\mathcal{Z}(*, *)$ を考え，これに付随する 2 種類のスペクトル系列が E^2-term で退化してちょうど同型の両辺に一致することを示す，というものである．退化を証明する部分にホモトピー不変性が用いられる．$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ のホモトピー不変性を示すためには，まず同型 $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \otimes \mathbb{A}^1, q) \cong \varinjlim_{m \geq 1} \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-m)}, q)$ が成り立つことに注意する（モデュラス付きサイクル複体の定義から容易）．よって任意の $m = p^n$ に対し同型 $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \cong \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-p^n)}, q) \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ を示せばよい．これを示すためには補題 2.10 と 2.11 の variant として次を示せば良い．部分複体 $z^r_{\{0,1\}}(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-p^n)}, *) \subset z^r(\mathscr{X} \otimes \overline{\square}^{(-p^n)}, *)$ を先程と同様にして定義する．

Lemma 2.13 (移動補題). 包含写像 $z^r_{\{0,1\}}(\mathscr{X}\otimes\overline{\square}^{(-p^n)},*)\hookrightarrow z^r(\mathscr{X}\otimes\overline{\square}^{(-p^n)},*)$ は複体の擬同型である.

Lemma 2.14 (剛性補題). 複体の写像 $i_0^*,i_1^*: z^r_{\{0,1\}}(\mathscr{X}\otimes\overline{\square}^{(-1)},*)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]\to z^r(\mathscr{X},*)\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ はホモトピックである.

移動補題 2.13 に関しては，2.10 と全く同じ証明が通用する．そこで剛性補題 2.14 が問題だが，$\mathbb{P}^1$ 上の自己射 $t\mapsto t^p$ （t はパラメータ）を考えることにより，帰納的に n を小さくしていき $m=p^0=1$ の場合に帰着することができる．この帰着の過程で p 冪倍のずれが発生するので，この影響を無視するために p を可逆化する必要がある．

2.6 展望

モデュラス理論はまだまだ発展途上の理論なので，やるべきことは沢山残っている．私個人の今後の目標は，予想 2.8 の正しい定式化を見出して証明を与えること，および，基礎体の標数が 0 の場合のモデュラス付き高次 Chow 群の構造を研究することである．

参考文献

[1] Binda, F. and Saito, S. : *Relative cycles with moduli and regulator maps*, arXiv preprint http://arxiv.org/abs/1412.0385 (2014).

[2] Bloch, S. : *Algebraic Cycles and Higher K-theory*, Advances in Mathematics **61**, Issue 3, 267-304 (1986).

[3] Bloch, S. : *Some notes on elementary properties of higher chow groups, including functoriality properties and cubical chow groups*, available at the homepage of S. Bloch http://www.math.uchicago.edu/~bloch/publications.html.

[4] Bloch, S. and Esnault, H. : *An additive version of higher Chow groups*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 36, 463-477 (2003).

[5] Kahn, B. Saito, S. and Yamazaki, T. : *Motives of modulus*, arXiv preprint http://arxiv.org/abs/1511.07124 (2015).

[6] Kerz, M. and Saito, S. : *Chow group of 0-cycles with modulus and higher-dimensional class field theory*, Duke Math. J. Volume 165, Number 15 (2016), 2811-2897.

[7] Mazza, C. Voevodsky, V. and Weibel, C. : *Lecture Notes on Motivic Cohomology.* Clay Mathematical Monographs, **2** (2006).

[8] Miyazaki, H. : Cube invariance of higher Chow group with modulus, Preprint.

[9] Miyazaki, H. : *On a generalization of modulus pairs and its applications*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu: Algebraic Number Theory and Related Topics 2015.

[10] Rülling, K. : *The generalized de Rham-Witt complex over a field is a complex of zero-cycles*, J. Algebraic Geom. **16** (2007), 109-169.

[11] Saito, S. : 高次元ハッセ原理と類体論の一般化, 数理解析研究所講究録別冊 (2011), B25: 185-209.

[12] Schmidt, A. and Spieß, M. : *Singular Homology and Class Field Theory of Varieties over Finite Fields*, J. reine u. ang. Math. **527** (2000) pp. 13-37.