

時間的極小曲面の特異点とガウス曲率

赤嶺 新太郎 (Shintaro AKAMINE)*

九州大学大学院数理学府数理学専攻

概要

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間 \mathbb{L}^3 内の時間的極小曲面のガウス曲率の符号 (実および複素主曲率の有無) が, 曲面を構成する2つのナル曲線の退化性と向きだけで決まることを証明した. さらに時間的極小曲面のある種の特異点を許容するクラスを考えた場合, 曲面の非退化な特異点のまわりでガウス曲率の符号が正になるか負になるかは, 特異点の近傍で曲面が波面と呼ばれる構造を有するかどうかで決まることを決定した. 本講演の内容は論文 [1] に基づく.

1 導入

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間 \mathbb{L}^3 内の時間的 (resp. 空間的) 曲面とは, 曲面への \mathbb{L}^3 からの誘導計量がローレンツ計量, すなわち指数1の非退化計量 (resp. リーマン計量) を与えている曲面を指す. 3次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 の曲面や \mathbb{L}^3 内の空間的曲面などのリーマン多様体の場合とは顕著に異なる \mathbb{L}^3 内の時間的曲面の性質として, 曲面の主曲率が常に実数の範囲内で取れるとは限らない, というものがある. これは曲面の主曲率を与える型作用素が常に実対角化可能ではないということに起因する. 型作用素 S の対角化可能性を決める固有方程式 $\lambda^2 - \text{Tr}S\lambda + \det S = 0$ の判別式は, 曲面のガウス曲率 $K = \det S$ および平均曲率 $H = \text{Tr}S/2$ を用いて, $4(H^2 - K)$ と表される. 本講演では, 特に平均曲率 H が恒等的に零である場合を扱う. 本講演では, そのような曲面を平均曲率零曲面 (zero mean curvature surface) と呼ぶ.

3次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の平均曲率零曲面は極小曲面 (minimal surface) と呼ばれる. 極小曲面は面積汎関数の臨界点を与える曲面であり, 針金等で境界を固定したときにできる石鹸膜の数学的モデルとなっている. \mathbb{L}^3 の空間的, 時間的な平均曲率零曲面はそれぞれ極大曲面 (maximal surface), 時間的極小曲面 (timelike minimal surface) と呼ばれる. \mathbb{L}^3 内の時間的極小曲面は, 常に面積汎関数の極小値も極大値も与えない (臨界点を与える曲面ではある) が, 1次元多様体で表される閉じた弦が時間方向に動いた場合に行ける曲面が面積汎関数の臨界点となるように現れることから, 世界面 (world sheet) と呼ばれる対象として現れるという物理的な側面もある ([3, 8] やその参考文献を参照). \mathbb{E}^3 内の極小曲面とは異なり, \mathbb{L}^3 内の平均曲率零曲面は, しばしば階数1の特異点を持つ. 本講演では, 時間的極小曲面を取り扱う.

時間的極小曲面に対して上記の型作用素の対角化可能性の問題を考えると, ガウス曲率 K の符号 (凹凸などの曲面の形) を調べれば良いことがわかる. 具体的には, K が正の点で複素の主曲率が取れ, 負の点で実の主曲率が取れる. ガウス曲率が零になる点は次節で述べるように二種類の“臍点”からなることがわかる. 本講演では, 時間的極小曲面のガウス曲率の符号は曲面のどのような情報で決まるのか, また, 特異点がある場

* 本研究は JSPS 科研費 JP15J06677 の助成を受けたものです.

〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地 九州大学大学院数理学府

e-mail: s-akamine@math.kyushu-u.ac.jp

合にはその近傍でガウス曲率はどのような振る舞いをするかといった問題について研究したことを述べる。

2 時間的極小曲面とナル曲線

この節では、3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の微分幾何学について必要な用語を説明する。時間的曲面については [19] が参考になる。

2.1 時間的曲面とその型作用素

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間 \mathbb{L}^3 とは、3次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^3 に次のローレンツ計量を入れたものである：

$$\langle , \rangle = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 .$$

ここで、 \mathbb{R}^3 の標準座標系を (x^0, x^1, x^2) としている。 \mathbb{L}^3 内の零でないベクトル v は、その大きさ $\langle v, v \rangle$ が正、負、または零のとき、それぞれ空間的 (spacelike)、時間的 (timelike)、または光的 (lightlike) と呼ばれる。零ベクトルは空間的ベクトルとしておく。光的ベクトル全体の集合 $\mathbb{Q}^2 := \{v = (v^0, v^1, v^2) \in \mathbb{L}^3 \mid \langle v, v \rangle = 0, v^0 \neq 0\}$ は光錐と呼ばれる錐をなす。 I を \mathbb{R} の区間とする。 $\gamma = \gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ をナル曲線 (null curve)、つまり

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$$

を満たす正則曲線とする。 $\Sigma := \Sigma^2$ を連結で向き付けられた滑らかな2次元多様体とし、曲面を与えるはめ込み写像 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$ を考える。このとき、 f が時間的 (resp. 空間的) であるとは、 Σ への誘導計量、すなわち第一基本形式 $I = f^*\langle , \rangle$ が指数1の非退化計量 (resp. 正定値計量) を与える場合を指す。

時間的はめ込み f とその空間的な単位法ベクトル場 ν に対して、型作用素 (shape operator) S と第二基本形式 II はそれぞれ次で定義される：

$$df(S(X)) = -\bar{\nabla}_X \nu, \quad II(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_{df(X)} df(Y) - df(\nabla_X Y), \nu \rangle$$

ここで、 X と Y は Σ 上の滑らかなベクトル場であり、 ∇ および $\bar{\nabla}$ はそれぞれ Σ, \mathbb{L}^3 上のレヴィ・チビタ接続である。平均曲率 H およびガウス曲率 K はそれぞれ $H = \text{Tr}S/2$, $K = \det S$ で定義される。ガウス方程式によって時間的曲面のガウス曲率はローレンツ多様体 (Σ, I) の断面曲率と一致していること、特に内在的な量であることが分かる。

\mathbb{E}^3 内の曲面、 \mathbb{L}^3 内の空間的曲面と \mathbb{L}^3 内の時間的曲面の間にある最も顕著な違いの一つは型作用素 S の対角化可能性にある。型作用素 S は、ローレンツ計量 I に対して自己共役だが、その表現行列は一般に対称行列にはならないため、型作用素は一般に実数体 \mathbb{R} 上で対角化可能とは限らない。 S の固有値のことを主曲率と呼ぶが、時間的曲面に対しては、実曲面を考えているにも関わらず、主曲率は一般には複素数になる場合もある。 \mathbb{E}^3 内の曲面、 \mathbb{L}^3 内の空間的曲面に対しては、型作用素 S は対称行列になるので実対角化可能となり、実の主曲率 κ_1, κ_2 が取れる。従って型作用素 S の固有方程式の判別式 $H^2 - K$ は、 $H^2 - K = (\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2})^2 - \kappa_1 \kappa_2 = (\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2})^2 \geq 0$ を満たす。特に平均曲率 H が零である \mathbb{E}^3 の極小曲面や \mathbb{L}^3 の極大曲面に対しては、 $K \leq 0$ となることが分かる。曲面の第二基本形式 II が第一基本形式 I の定数倍になっている曲面上の点を臍点 (umbilic point) と呼ぶが、 \mathbb{E}^3 内の曲面や \mathbb{L}^3 内の空間的曲面に対して、臍点は $H^2 - K = 0$ を満たす点であることが分かる。他方で、 \mathbb{L}^3 内の時間的曲面に対しては、上述の理由から判別式 $H^2 - K$ はいかなる実数値も取り得る。正確には、次のとおりである：

- (i) 型作用素 S が \mathbb{R} 上で対角化可能な場合： $H^2 - K \geq 0$ であり， $H^2 - K = 0$ を満たす点は臍点に限る．
- (ii) 型作用素 S が複素数体 \mathbb{C} 上でのみ対角化可能な場合： $H^2 - K < 0$ ．
- (iii) 型作用素 S が \mathbb{C} 上でも対角化可能でない場合： $H^2 - K = 0$ ．

(iii) の状況に対して，Clelland [5] は次の定義を導入した：

定義 2.1 ([5]). 時間的曲面上の点 p が擬臍点 (quasi-umbilic point) であるとは，点 p における型作用素 S が \mathbb{C} においても対角化可能でない場合をいう．

本研究では，特に $H = 0$ の時間的極小曲面の場合を扱っているので，型作用素の対角化可能性はガウス曲率の符号を調べることで分かる．具体的には， K が負の点で実の主曲率が取れ，正の点で複素の主曲率が取れる．ガウス曲率が零になる平坦点は上記の臍点と擬臍点からなる．

2.2 時間的極小曲面とナル曲線

時間的曲面 $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$ の各点の近傍では，常に次のような特別な座標系の存在が知られている：

- (i) ローレンツ等温座標系 (Lorentzian isothermal coordinate system) (x, y) ：第一基本形式 I が零にならない関数 E を用いて， $I = E(-dx^2 + dy^2)$ と書ける局所座標系．
- (ii) ナル座標系 (null coordinate system) (u, v) ：第一基本形式 I が零にならない関数 F を用いて $I = 2Fdudv$ と書ける，すなわち，座標曲線の f による像がナル曲線となる局所座標系．

さらに，ローレンツ等温座標系 (x, y) とナル座標系 (u, v) の間には常に次の一対一対応がある：

$$x = \frac{u - v}{2}, \quad y = \frac{u + v}{2}. \quad (2.1)$$

ナル座標系 (u, v) では，平均曲率 H とはめ込み f の間には $H\nu = \frac{2}{F} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ なる関係式があることから，任意の時間的極小曲面はナル座標によって変数分離した次の表示を持つことが分かる．

事実 2.2 ([11]). $\varphi(u)$ および $\psi(v)$ を各点においてそれらの微分 $\varphi'(u)$ および $\psi'(v)$ が一次独立な \mathbb{L}^3 内のナル曲線とする．このとき

$$f(u, v) = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{2} \quad (2.2)$$

は時間的極小曲面を与える．逆に任意の時間的極小曲面は，局所的にはある 2 つのナル曲線 $\varphi(u)$ および $\psi(v)$ が存在して，式 (2.2) を満たすように表される．

本講演では，2 つのナル曲線の組の性質を明らかにすることによって時間的極小曲面のガウス曲率の挙動を調べる．この節の残りでは，後に必要となるナル曲線に関する幾つかの用語を記す．

定義 2.3 (cf. [6, 13]). 点 $t \in I$ において γ', γ'' が線形独立 (resp. 一次従属) であるとき，ナル曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ は t 上で非退化である (resp. 退化している) という． I の各点で非退化なっているとき，非退化ナル曲線と呼ぶ．

全ての点で退化しているナル曲線は光的な直線である．ナル曲線の非退化性は次のように特徴付けられる．

補題 2.4. ナル曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ に対して，次は同値である．

- (1) ナル曲線 γ が $t \in I$ 上非退化である .
- (2) $\det[\gamma'(t) \ \gamma''(t) \ \gamma'''(t)] \neq 0$.
- (3) $\gamma''(t)$ が空間的である .

この補題により非退化ナル曲線に対して、次の量を定めることができる .

定義 2.5 ([4], [18]). 非退化ナル曲線 γ に対し

$$\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle = 1$$

を満たすパラメータ s がとれる . s を擬弧長パラメータ (pseudo-arclength parameter) と呼ぶ .

定義 2.6. 非退化ナル曲線 γ に対して、 $\det[\gamma' \ \gamma'' \ \gamma''']$ の符号をナル曲線の向き (orientation) と定める .

ナル曲線 γ の速度ベクトル場 γ' は光錐 \mathbb{Q}^2 上にあるが、時間が進む (x^0 座標が増加する) に連れて、反時計回りに巻き付いて行くものを正の向き、時計回りに巻き付いていくものを負の向きと呼んでいる .

3 極小面とその表現公式

\mathbb{E}^3 内の極小曲面や \mathbb{L}^3 内の極大曲面においては、はめ込み写像から自然に誘導される複素構造を曲面の上で考え、リーマン面として捉えることが有効であるが、 \mathbb{L}^3 内の時間的極小曲面に対しては、しばしば次のパラ複素構造と呼ばれる代数構造を考えることがある . この節では、パラ複素数について述べ、高橋 [15] が導入した極小面の概念を紹介する . パラ複素数についての詳細は、[8, 10] やその参考文献を参照されたい .

3.1 パラ複素数と極小面

$j^2 = 1$ を満たす j を用いて、 $\mathbb{C}' = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}j$ という形で書かれる可換代数 \mathbb{C}' をパラ複素数代数 (paracomplex algebra) と呼び、 \mathbb{C}' の元をパラ複素数^{*1} と呼ぶ . 複素数の場合と同じように、パラ複素数 $z = x + jy$ に対して、その実部と虚部を $\operatorname{Re} z := x$ および $\operatorname{Im} z := y$ で、共役を $\bar{z} := x - jy$ で定義する . \mathbb{C}' は次のように 2 次元のローレンツ・ミンコフスキー平面 $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{L}^2} = -dx^2 + dy^2)$ と同一視される :

$$\mathbb{C}' \ni z = x + jy \longleftrightarrow z = (x, y) \in \mathbb{L}^2$$

この同一視の下で \mathbb{L}^2 のローレンツ内積 $\langle z_1, z_2 \rangle_{\mathbb{L}^2}$ は、 $-\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2)$ と同一視され、特に $\langle z, z \rangle_{\mathbb{L}^2} = -z\bar{z}$ と書ける . 次にパラ・リーマン面の定義を与える . $\Sigma = \Sigma^2$ を向き付けられた 2 次元多様体とする . Σ 上の $(1, 1)$ -テンソル場 J は、 $J^2 = \operatorname{id}_{T\Sigma}$ を満たし、各接平面 $T\Sigma$ を 1 次元の ± 1 固有空間に分けると、 Σ 上の概パラ複素構造 (almost paracomplex structure) と呼ばれる . このとき、 J は常に可積分である、すなわち、任意の点の近傍に対して、 Σ の向きに同調した座標近傍系 $(U; u, v)$ が存在して、次を満たす :

$$J\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = -\frac{\partial}{\partial v}.$$

上記の座標近傍系 $(U; u, v)$ もナル座標系と呼び、さらに組 (Σ, J) をパラ・リーマン面 (para-Riemann surface) と呼ぶ . パラ・リーマン面 (M, J) 、 (N, J') 間の写像 φ がパラ正則であるとは、 $d\varphi \circ J = J' \circ d\varphi$ を満たすことをいう . パラ正則関数は局所的には次のように表すことができる :

^{*1} パラ複素数は、split-complex number や Lorentz number などとも呼ばれる .

事実 3.1 ([15]). $D \subset (\mathbb{C}'; z = x + jy = \frac{u-v}{2} + j\frac{u+v}{2})$ を領域とする. 滑らかな関数 $\varphi = \varphi^1 + j\varphi^2 : D \rightarrow \mathbb{C}'$ がパラ正則であることと, 2つの一変数関数 $f = f(u), g = g(v)$ が存在して $\varphi(z) = \frac{f(u)+g(v)}{2} + j\frac{f(u)-g(v)}{2}$ を満たすことは同値である.

高橋 [15] は, ある種の特異点を許容する時間的極小曲面のクラスとして次を導入した:

定義 3.2 ([15]). パラ・リーマン面 (Σ, J) に対して, 滑らかな写像 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$ が極小面 (minface) であるとは, 次を満たす場合をいう:

- (1) Σ の開かつ稠密な部分集合 W が存在して, f の W 上への制限は時間的な共形極小はめ込みになる.
- (2) 任意のナル座標系 $(U; u, v)$ 上で f_u および f_v がどの点でも零にならない.

導入で述べたように, 空間的な平均曲率零曲面のことを極大曲面 (maximal surface) と呼ぶ. 梅原-山田は, [17] にて, 階数 1 の特異点のみを許容する極大曲面のクラスとして極大面 (maxface) と呼ばれるクラスを導入した. 定義の条件 (2) から, 極小面も特異点の階数が 1 であることを要請している.

3.2 パラ正則ワイエルシュトラスの表現公式とその実型

\mathbb{E}^3 における極小曲面論では, 任意の単連結な極小曲面*2はあるリーマン面 Σ とその上の正則微分 1-形式 ω , 有理型関数 g の 3 つ組 (Σ, ω, g) を用いて書くことができる, というワイエルシュトラスの表現公式 (Weierstrass representation formula) と呼ばれる定理が知られている. 極小面に対してもそのような表現公式が成り立つことを主張するのが次の事実である:

事実 3.3 (局所版パラ正則ワイエルシュトラスの表現公式 [15]). (Σ, J) をパラ・リーマン面とする. 極小面 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$ と任意の点 $p \in \Sigma$ に対して, p のある近傍上のパラ正則関数 g とパラ正則 1 形式 $\omega = \hat{\omega}dz$ が存在して, f は p の近傍では次のように書ける:

$$f(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 + g^2, 2g, j(-1 + g^2)) \omega + f(z_0). \quad (3.1)$$

さらに, 事実 3.1 により, パラ正則関数 g とパラ正則 1 形式 $\omega = \hat{\omega}dz$ を

$$g(z) = \frac{g_1(u) + g_2(v)}{2} + j\frac{g_1(u) - g_2(v)}{2},$$

$$\hat{\omega}(z) = \frac{\hat{\omega}_1(u) + \hat{\omega}_2(v)}{2} + j\frac{\hat{\omega}_1(u) - \hat{\omega}_2(v)}{2}, \quad z = x + jy = \frac{u-v}{2} + j\frac{u+v}{2}$$

と分解することで, 次の極小面のナル曲線への分解を得る:

$$f(u, v) = \frac{1}{2} \int_{u_0}^u (-1 - (g_1)^2, 1 - (g_1)^2, 2g_1) \hat{\omega}_1 du$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{v_0}^v (1 + (g_2)^2, 1 - (g_2)^2, -2g_2) \hat{\omega}_2 dv + f(u_0, v_0). \quad (3.2)$$

組 (g, ω) をワイエルシュトラス・データ, 4 つ組 $(g_1, g_2, \hat{\omega}_1 du, \hat{\omega}_2 dv)$ を実ワイエルシュトラス・データと呼ぶ.

注意 3.4. [15] では, パラ有理型関数の概念を用いて大域的な表現公式が示されている. 本講演ではガウス曲率の局所的な振る舞いを調べるという目的から, 上記の局所版の表現公式のみを用いる.

*2 単連結でない場合は普遍被覆空間からのはめ込み写像を考える.

4 極小面の正則点におけるガウス曲率の振る舞い

4.1 ナル曲線の退化性による平坦点の特徴付け

2.1 節で極小面の正則点集合における平坦点は臍点と擬臍点からなることを見たが、それらの点を極小面を生成する 2 つのナル曲線の退化性で特徴付けたのが次の命題である。以下、極小面の局所的な振る舞いを調べるときは常に (2.2) で与えられるナル曲線 2 つ組への分解を一つ取って考える*3。

命題 4.1 ([1]). 極小面 f の正則点 $p \in \Sigma$ に対して、次が成り立つ：

- (1) p が臍点であることと、 p 上で φ と ψ は両方とも退化していることは同値である。
- (2) p が擬臍点であることと、 p 上で φ または ψ のどちらか一方のみが退化していることは同値である。

従って、極小面の非平坦点の近傍では、常に非退化ナル曲線の 2 つ組を考えておけば良いことがわかった。

4.2 非平坦点の近傍におけるガウス曲率の符号

次に非平坦点上でガウス曲率の符号が (3.2) の 2 つの非退化ナル曲線の向きのみで完全に決定されることを見る。補題 2.4 および命題 4.1 により、非平坦点の近傍でパラメータ u および v を式 (3.2) の右辺に現れる 2 つの非退化ナル曲線の擬弧長表示として取ることで次を得る：

命題 4.2 ([1]). (1) 非平坦点の近傍で、極小面 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$ は、

$$f(u, v) = \frac{1}{2} \int_{u_0}^u (-1 - (g_1)^2, 1 - (g_1)^2, 2g_1) \frac{-\varepsilon_\varphi}{2g_1'} du + \frac{1}{2} \int_{v_0}^v (1 + (g_2)^2, 1 - (g_2)^2, -2g_2) \frac{-\varepsilon_\psi}{2g_2'} dv + f(u_0, v_0) \quad (4.1)$$

と書ける。ここで、右辺の非退化ナル曲線を $\varphi = \varphi(u)$, $\psi = \psi(v)$ と書くことにする。 ε_φ および ε_ψ は φ , ψ の向きであり、 u , v はその擬弧長パラメータである。

- (2) このとき、ローレンツ等温座標 $(x, y) = (\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2})$ 上で f の第一基本形式 I, 第二基本形式 II, およびガウス曲率 K は次のように書かれる：

$$I = \frac{(1 - g_1 g_2)^2}{4g_1' g_2'} (-dx^2 + dy^2), \quad II = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) dx dy, \quad K = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{E^2}.$$

ここで $E = \frac{(1 - g_1 g_2)^2}{4g_1' g_2'}$ である。従って、ガウス曲率 K の符号は 2 つの非退化ナル曲線 φ , ψ の向きのみで決まる。 $K > 0$ となるのは φ , ψ が同じ向きを持つ場合に限り、このとき (x, y) は共形漸近線座標になる。 $K < 0$ となるのは φ , ψ が異なる向きを持つ場合に限り、このとき (x, y) は共形曲率線座標になる。

注意 4.3. ガウス曲率の符号については、同様の結果を Milnor [12] が既に証明している。その証明ではナル曲線のユークリッド計量に対する弧長を取ってナル座標系を正規化する、という方法を取っている。本命題で

*3 分解 (2.2) は時間的極小曲面に対するものであるが、事実 3.3 の式 (3.2) により、この表示は極小面の各点の近傍に対しても有効であることが分かる。さらに、このような極小面のナル曲線 2 つ組への分解は、曲面のナル座標変換と \mathbb{L}^3 の平行移動を除いて一意であることも証明できる。

は弧長ではなく擬弧長を取ることによって同様のことを証明したほか、共形曲率線座標や共形漸近線座標の具体的な構成方法を与えている。

5 極小面の特異点におけるガウス曲率の振る舞い

5.1 フロントと波面

この節では極小面上の特異点の近傍におけるガウス曲率の振る舞いを決定する。はじめに、フロントや波面といった特異点付きの曲面の概念と関連する基本的な用語や結果を記す。詳しくは [2, 7, 9, 14, 16, 17] 等を参照されたい。\$U\$ を \$\mathbb{R}^2\$ の領域とし、滑らかな写像 \$f : U \to \mathbb{R}^3\$ がフロント (frontal) であるとは、\$U\$ 上でユークリッド計量 \$\langle \cdot, \cdot \rangle_E\$ の意味での単位法ベクトル場 \$n\$ が存在するときをいう。さらにフロント \$f\$ に対して、ルジャンドル・リフトと呼ばれる写像の組

$$L = (f, n) : U \to \mathbb{E}^3 \times \mathbb{S}^2$$

がめ込み写像を与えるとき、\$f\$ を波面 (wave front) と呼ぶ。フロント \$f : U \to \mathbb{R}^3\$ に対して、\$f\$ がめ込みにならない点 \$p \in U\$ をフロント \$f\$ の特異点と呼ぶ。次で定義される \$U\$ 上の滑らかな関数 \$\lambda\$ を符号付き面積密度関数という：

$$\lambda = \det(f_u, f_v, n) = \langle f_u \times_E f_v, n \rangle_E,$$

ここで \$\times_E\$ は \$\mathbb{E}^3\$ 内のベクトル積を表している。\$f\$ の特異点は \$\lambda\$ の零点に他ならないが、特に \$d\lambda_p \neq 0\$ を満たす特異点のことを非退化特異点 (non-degenerate singular point) と呼ぶ。非退化特異点 \$p\$ の近傍では、陰関数定理により、\$\gamma(0) = p\$ を満たす正則曲線 \$\gamma = \gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U\$ でその像が \$p\$ の回りでは、\$f\$ の特異集合と一致しているものが取れる。このような曲線 \$\gamma\$ を \$p\$ における \$f\$ の特異曲線と呼ぶ。

次に写像 (芽) の \$\mathcal{A}\$-同値性とフロントや波面に現れる典型的な特異点について述べる。\$U_i\$ を \$\mathbb{R}^2\$ の領域、\$p_i\$ を \$U_i\$ の点とする (\$i = 1, 2\$)。2つのなめらかな写像 \$f_1 : U_1 \to \mathbb{R}^3\$ と \$f_2 : U_2 \to \mathbb{R}^3\$ が \$p_1 \in U_1\$ および \$p_2 \in U_2\$ で \$\mathcal{A}\$-同値 (または 右左同値) であるとは、\$\Phi(p_1) = p_2\$ を満たす \$\mathbb{R}^2\$ の局所微分同相写像 \$\Phi\$ と、\$\Psi(f_1(p_1)) = f_2(p_2)\$ を満たす \$\mathbb{R}^3\$ の局所微分同相写像 \$\Psi\$ が存在して \$f_2 = \Psi \circ f_1 \circ \Phi^{-1}\$ を満たすことをいう。フロント \$f : U \to \mathbb{R}^3\$ の特異点 \$p\$ がカスプ辺 (cuspidal edge)、ツバメの尾 (swallowtail)、またはカスプ状交叉帽子 (cuspidal cross cap) であるとは、\$f\$ が特異点 \$p\$ 上で次の写像 \$f_C, f_S\$, または \$f_{CCR}\$ の原点と \$\mathcal{A}\$-同値であることをいう (図 1 参照)：

$$f_C(u, v) = (u^2, u^3, v), \quad f_S(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v), \quad f_{CCR}(u, v) = (u, v^2, uv^3).$$

カスプ辺、ツバメの尾は波面の非退化特異点であり、カスプ状交叉帽子は波面の特異点ではないが、フロントの非退化特異点である。

5.2 極小面の特異点とその近傍におけるガウス曲率の振る舞い

高橋は [15] において、極小面は常にフロントであることを示し、極小面上にしばしば現れる特異点であるカスプ辺、ツバメの尾およびカスプ状交叉帽子のワイエルシュトラス・データを用いた次の判定法を与えた。

事実 5.1 ([15]). \$f : \Sigma \to \mathbb{L}^3\$ を極小面、\$p \in \Sigma\$ を \$f\$ の特異点とする。\$p\$ の近傍で実ワイエルシュトラス・データ \$(g_1, g_2, \omega_1 = \hat{\omega}_1 du, \omega_2 = \hat{\omega}_2 dv)\$ を取る。\$f\$ が特異点 \$p\$ において、

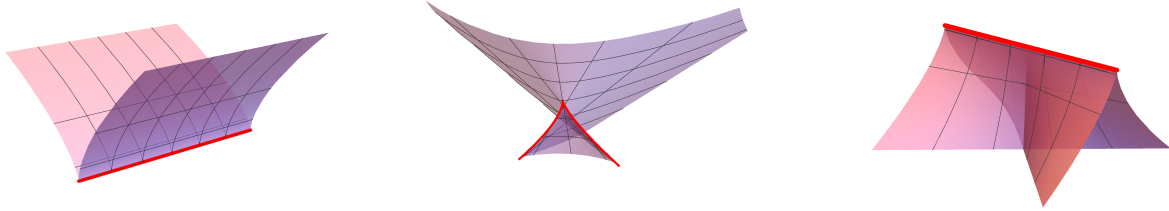


図1 左からカスプ辺，ツバメの尾およびカスプ状交叉帽子（特異曲線の像を赤で記している）

- (1) カスプ辺と \mathcal{A} 同値である $\Leftrightarrow p$ 上で $\frac{(g_1)_u}{g_1^2 \hat{\omega}_1} - \frac{(g_2)_v}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \neq 0$ かつ $\frac{(g_1)_u}{g_1^2 \hat{\omega}_1} + \frac{(g_2)_v}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \neq 0$ を満たす，
- (2) ツバメの尾と \mathcal{A} 同値である $\Leftrightarrow p$ 上で $\frac{(g_1)_u}{g_1^2 \hat{\omega}_1} - \frac{(g_2)_v}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \neq 0$, $\frac{(g_1)_u}{g_1^2 \hat{\omega}_1} + \frac{(g_2)_v}{g_2^2 \hat{\omega}_2} = 0$, かつ $\left(\frac{(g_1)_u}{g_1^2 \hat{\omega}_1}\right)_u \frac{(g_2)_v}{g_2} - \left(\frac{(g_2)_v}{g_2^2 \hat{\omega}_2}\right)_v \frac{(g_1)_u}{g_1} \neq 0$ を満たす，
- (3) カスプ状交叉帽子と \mathcal{A} 同値である $\Leftrightarrow p$ 上で $\frac{(g_1)_u}{g_1^2 \hat{\omega}_1} - \frac{(g_2)_v}{g_2^2 \hat{\omega}_2} = 0$, $\frac{(g_1)_u}{g_1^2 \hat{\omega}_1} + \frac{(g_2)_v}{g_2^2 \hat{\omega}_2} \neq 0$, かつ $\left(\frac{(g_1)_u}{g_1^2 \hat{\omega}_1}\right)_u \frac{(g_2)_v}{g_2} + \left(\frac{(g_2)_v}{g_2^2 \hat{\omega}_2}\right)_v \frac{(g_1)_u}{g_1} \neq 0$ を満たす．

注意 5.2. [17] において，極大面におけるカスプ辺およびツバメの尾の判定法が与えられた．その後，[7] において，カスプ状交叉帽子の判定法が与えられたほか，極大面のジェネリックな特異点がこれら三種類の特異点に尽きることが示されている．

極小面の正則点におけるガウス曲率の振る舞いを調べる際に使用した擬弧長を用いる方法と，上述の高橋の特異点の判定法を用いると次が証明できる．

命題 5.3 ([1]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$ を極小面， $p \in \Sigma$ を f の特異点とする．このとき， f が特異点 p で，

- (1) カスプ辺と \mathcal{A} -同値であるならば，特異点 p の近傍には臍点は存在しない，
- (2) ツバメの尾と \mathcal{A} -同値であるならば，特異点 p の近傍には臍点も擬臍点も存在しない．さらにガウス曲率 K は p の近傍で負になり， $\lim_{q \rightarrow p} K(q) = -\infty$ が成り立つ，
- (3) カスプ状交叉帽子と \mathcal{A} -同値であるならば，特異点 p の近傍には臍点も擬臍点も存在しない．さらにガウス曲率 K は p の近傍で正になり， $\lim_{q \rightarrow p} K(q) = \infty$ が成り立つ．

この命題では，特異点の型をカスプ辺，ツバメの尾，カスプ状交叉帽子に絞って考えているが，実は次のような一般的な形で述べることができる．次の定理が本講演の主定理である．

定理 5.4 ([1]). $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$ を極小面， $p \in \Sigma$ を f のカスプ辺でない特異点とする．このとき， f が p 上で，

- (1) 波面になるならば，特異点 p の近傍には臍点も擬臍点も存在しない．さらにガウス曲率 K は p の近傍で負になり， $\lim_{q \rightarrow p} K(q) = -\infty$ が成り立つ，
- (2) 波面にはならず， p がフロントルの非退化特異点になるならば，特異点 p の近傍には臍点も擬臍点も存在しない．さらにガウス曲率 K は p の近傍で正になり， $\lim_{q \rightarrow p} K(q) = \infty$ が成り立つ．

この定理により，極小面上に非退化特異点があった場合，カスプ辺以外のガウス曲率が負か正か（実の主曲率が取れるか，複素の主曲率が取れるか）は，特異点が波面の特異点になっているか否か判定すれば良いこと

がわかった．荒く言えば，極小面上にカスプ辺以外の特異点があった場合，特異点の情報から，その近傍で曲面の形状を決めることができることがわかった．他方で，カスプ辺の近傍のガウス曲率の振る舞いについては，一般的に述べることは出来ない．例えば，あるカスプ辺の近傍でガウス曲率の符号が正になる場合もあれば負になる場合もある．また極大面の場合とは異なり，ガウス曲率が発散しない場合もある．但し，次の時間的極小エネパー曲面の例のようにカスプ辺が他の非退化特異点にぶつかっている場合は，定理 5.4 により，ぶつかった特異点の近くにあるカスプ辺の近傍でのガウス曲率の振る舞いは，ぶつかった特異点の近傍でのガウス曲率の振る舞いと一致することが分かる．

例 5.5 (エネパー曲面)．次のワイエルシュトラス・データを式 (3.1) に代入することで得られる曲面を \mathbb{L}^3 内の時間的極小エネパー曲面という [8, 10, 15]：

$$g(z) = z, \quad \omega(z) = \frac{1}{2}dz.$$

曲面を生成する 2 つのナル曲線 φ と ψ は次で書かれる：

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\left(-u - \frac{u^3}{3}, u - \frac{u^3}{3}, u^2\right), \quad \psi(v) = \frac{1}{2}\left(v + \frac{v^3}{3}, v - \frac{v^3}{3}, v^2\right).$$

計算によって， φ と ψ は擬弧長でパラメータ表示されており，それぞれ負の向きと正の向きを持つことが分かる．滑らかな曲面である \mathbb{E}^3 内のエネパー曲面に対して， \mathbb{L}^3 内のエネパー曲面は特異点を持つ（図 2 参照）．極大エネパー曲面はカスプ辺と 4 つのツバメの尾とカスプ状交叉帽子を持つことが知られている（[7, 17]）が，時間的極小エネパー曲面はカスプ辺と 2 つのツバメの尾特異点を持つのみ（[15]）で，カスプ状交叉帽子を持たない．これは，もしカスプ状交叉帽子を持てば，命題 5.3 より，その近傍でガウス曲率の符号が正になってしまい，時間的極小エネパー曲面が異なる向きを持った 2 つのナル曲線で生成されることに反するからである．

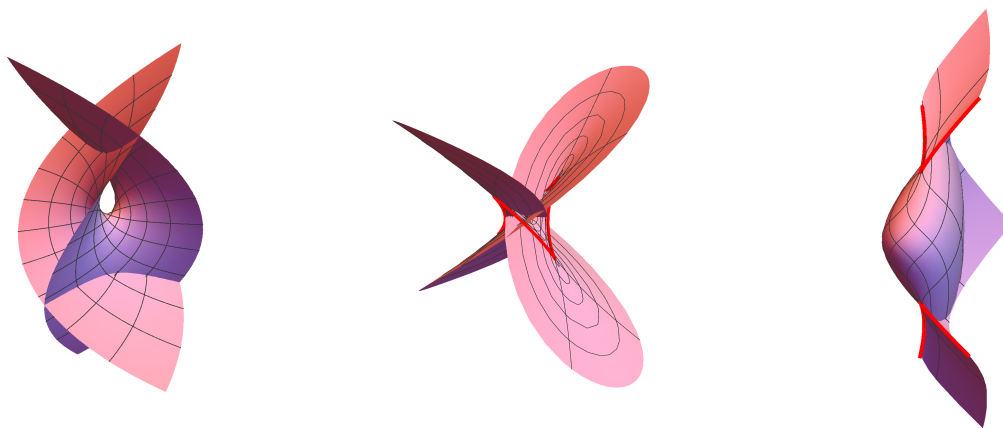


図 2 左から \mathbb{E}^3 のエネパー曲面， \mathbb{L}^3 の極大エネパー曲面，時間的極小エネパー曲面（特異曲線の像を赤で記している）

謝辞

第 13 回数学総合若手研究集会での講演の機会，および本稿の執筆の機会を与えてくださいました北海道大学の世話人の方々に感謝申し上げます．

参考文献

- [1] S. Akamine, *Behavior of the Gaussian curvature of timelike minimal surfaces with singularities*, submitted, arXiv:1701.00238.
- [2] V.I. Arnol'd, *Singularities of caustics and wave fronts*, Math. and its Appl. **62**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1990).
- [3] G. Bellettini, J. Hoppe, M. Novaga and G. Orlandi, *Closure and convexity results for closed relativistic strings*, Complex Anal. Oper. Theory **4** (2010) 473–496.
- [4] W.B. Bonnor, *Null curves in a Minkowski space-time*, Tensor N.S. **20** (1969), 229–242.
- [5] J.N. Clelland, *Totally quasi-umbilic timelike surfaces in $\mathbb{R}^{1,2}$* , Asian J. Math. **16** (2012), 189–208.
- [6] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and 2-dimensional fluid mechanics*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 173–200.
- [7] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [8] J. Inoguchi and M. Toda, *Timelike minimal surfaces via loop groups*, Acta Appl. Math. **63** (2004), 313–355.
- [9] S. Izumiya, M.C. Romero Fuster, M.A.S Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. (2015).
- [10] J. Konderak, *A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces*, Complex Var. Theory Appl. **50** (5) (2005), 319–332.
- [11] L. McNertney, *One-parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Ph.D. thesis, Brown University, 1980.
- [12] T. K. Milnor, *Entire timelike minimal surfaces in $E^{3,1}$* , Michigan Math. J. **37** (1990), 163–177.
- [13] Z. Olszak, *A note about the torsion of null curves in the 3-dimensional Minkowski spacetime and the Schwarzian derivative*, Filomat **29** (2015), 553–561.
- [14] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.
- [15] 高橋英伸, 特異点を許す 3 次元時空内の時間的極小曲面について, 2012 年修士論文, 大阪大学.
- [16] 梅原雅顕, 特異点を持つ曲線と曲面の幾何学, 慶応義塾大学 Seminar on Mathematical Sciences **38**, (2009).
- [17] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.
- [18] E. Vessiot, *Sur les courbes minima*, Comptes Rendus, **140** (1905), 1381–1384.
- [19] T. Weinstein, *An Introduction to Lorentz Surfaces*, de Gruyter Exposition in Math. **22**, Walter de Gruyter, Berlin, (1996).