

ヒルベルト変換を使用した為替レートの同期解析

一橋大学大学院商学研究科
武藤 誠 (Makoto MUTO)
一橋大学大学院商学研究科
JST さきがけ
斉木 吉隆 (Yoshitaka SAIKI)

1. 研究の背景

1.1 為替レートと為替相場制度

本研究ではヒルベルト変換を使用し、名目為替レート（以下、為替レート）間の同期レベルの解析を行う。為替レートとは二つの通貨の交換比率を表す。例えば、米ドルと日本円の為替レートは1ドル=100円などで表され、値は常に変動する。1ドル=105円となった場合、相対的にドルの価値が上昇し、日本円の価値が下落したことを表す。通貨の価値が上昇することを増価、逆に低下することを減価と呼ぶ。為替レートは各国の為替相場制度に従い、変動が固定されることもある。固定相場制度はある通貨に対して自国通貨を一定、または狭い変動幅で固定する制度である。特にドルに対して固定している場合、ドルペッグ制と呼ばれる。固定相場制度の国では、為替レートが変動すると通貨当局が介入し、為替レートを調整する。変動相場制度は為替レートを自由に変動させる制度であり、基本的に為替レートの変動に対して通貨当局は介入しない。他にも、ある一定以上為替レートが変動した場合のみ介入を行う為替バンド制度、複数通貨の加重平均に対し自国通貨を変動させるバスケット・ペッグ制度、通貨当局が為替レートを定期的に調整するクローリング・ペッグ制度などが存在し、これらは固定相場制度と変動相場制度の中間的な制度である。

1.2 同期現象

同期現象とは二つの自律振動子が相互作用によってリズムを調整する現象であると考えられてきた [4]。また、二つの自律振動子の位相が相互作用によってリズムを調整する場合、位相同期と呼ばれる。位相は 2π で一振幅する振動子の位置を表す。本研究において、同期は位相同期のことを指す。この同期は必ずしも同じ時刻で調整されている必要はなく、一方の自律振動子に対して、一定の遅れで同じ位相を持つように調整される場合も同じく同期である。同期が生じる主な要因として以下が考えられる。第一に自律振動子間の結合の強さである。自律振動子の間の結びつきが強いほど相互に大きな影響を与えるため、システムに調整が生じやすい。第二に周波数デチューニングが考えられる。これは二

つの自律振動子を隔離した際の自律振動子間のリズムの違いを表す。自律振動子固有のリズムが似ている場合、結合した際に同じ振動へ調整が行われやすい。周波数デチューニングが小さいほど、固有のリズムが似ていることを示す。

1.3 先行研究

1997年7月に生じたアジア通貨危機は東アジア全体の通貨を急激に下落させた。この原因の一つとして、東アジア各国がドル依存の体制であったことが指摘されている。ドル依存の体制とは、各国が為替レートを米ドルに対して固定させる傾向にあったことを意味する。アジア通貨危機を経験し、徐々にドル依存の体制から離れた国はあるが、現在も米ドルに対して自国通貨を固定している国は多いと考えられる。このような米ドルなどの国際通貨に対する東アジア通貨の連動性を分析した先行研究は多い[2, 3]。ここで、連動はデータ間の動きが同じであることを表すのに対し、同期は位相のリズムが調整されることを表す。本研究では先行研究に従い、米ドルと東アジア各国の通貨の関係を中心に分析するが、同期現象の手法を使用し、位相に焦点を当てている点が先行研究とは異なる。

経済データにヒルベルト変換を使用した研究には[7]がある。この論文は景気、為替レートおよび国内物価の連関ダイナミクスを実証研究している。その際、景気動向指数や為替レートなどの経済時系列データをヒルベルト変換し、得られた複素数データに対し主成分分析を行っている。

2 研究の目的

本研究の目的は米ドルの動きに対し、東アジア各国の通貨がどの程度影響を受けているかを分析することにある。このため、米ドルと東アジア通貨の為替レートに対し同期解析を行う。基準となる通貨にはスイスフランを用いる。スイスは変動相場制度であるため、スイスフランは第三国通貨として米ドルや東アジア通貨の動きを表しており連動の分析によく用いられる。例えば、米ドルと中国人民元の同期を解析する場合、スイスフラン米ドル為替レートとスイスフラン中国人民元為替レートの間同期が生じているかを解析する。同期が生じている場合、中国人民元は米ドルに影響を受けていると判断できる。

本研究で使用する解析手法では、影響の方向までは測ることができない。同期が示されても、米ドルが中国人民元にどの程度影響を与え、中国人民元が米ドルにどの程度影響を与えているかを正確に知ることはできない。しかし経済学的に考えると、同期が生じていた場合、そのほとんどは米ドルの影響が寄与していると考えられる。そのため同期が示された場合、米ドルに対し、もう一方の通貨が影響を受けていると解釈する。

3 仮説

各国の為替レートは経済活動を通じて強く結合している。また、為替レート間の周波数デチューニングはそれほど大きくないと予想される。これは為替レートが好況・不況などの大局的なトレンドに影響を受けているためである。このことから、各為替レートはリズムがある程度近いと考えられ、調整が行われやすい状態にあることが示唆される。

ドルペッグ制の国では通貨当局の介入により自国通貨を米ドルに対して固定している。固定するメリットは国際取引における為替リスクの軽減などが考えられる。また、アメリカと経済構造が類似している国では、自国通貨が米ドルと同じリズムに調整されやすい。東アジアには上記のようなドルペッグ制の国やそれに近い制度の国、またはアメリカ経済に強い影響を受けている国が多い。そのため、東アジア通貨は米ドルと強い同期が生じていると考えられる。また米ドルに対して介入している場合の方が同期レベルは高く、介入していない場合は相対的に同期レベルが低いと考えられる。

4 データ

データは対スイスフランの為替レートを用いる。例えば、1 スイスフラン=1.01 ドルというデータである。期間はデータが取得できた 2003 年 7 月 15 日～2016 年 10 月 6 日とする。これは日次の営業日（土日は休み）のデータである。データはトムソン・ロイター・マーケティング株式会社の提供する時系列データベースである Datastream から取得した。解析に用いる通貨は国際通貨として米ドル、東アジア通貨としてインドネシアルピア、シンガポールドル、韓国ウォン、タイバーツ、台湾ドル、中国人民元、日本円、フィリピンペソ、香港ドル、マレーシアリングド、その他の通貨として南アフリカランド、ブラジルレアル、ロシアルーブルである。その他の通貨にはドルと関係性の弱いと考えられている通貨を選択した。これらは東アジア通貨との相対比較を行うために分析に含めた。

図 1～図 4 はスイスフラン米ドル為替レート、スイスフラン中国人民元為替レート、スイスフラン日本円為替レート、スイスフランブラジルレアル為替レートの推移である。米ドルと中国人民元は同じような推移を示している。米ドルと日本円は同じような推移を示している期間もあるが、中国人民元と比較すると異なる推移を示している。米ドルとブラジルは異なった推移を示している。例えば、2011 年 7 月頃のショックがブラジルレアルにはほとんど生じていないように見える。



図 1 スイスフラン米ドル為替レートの推移 (1 スイスフランに対する価格)

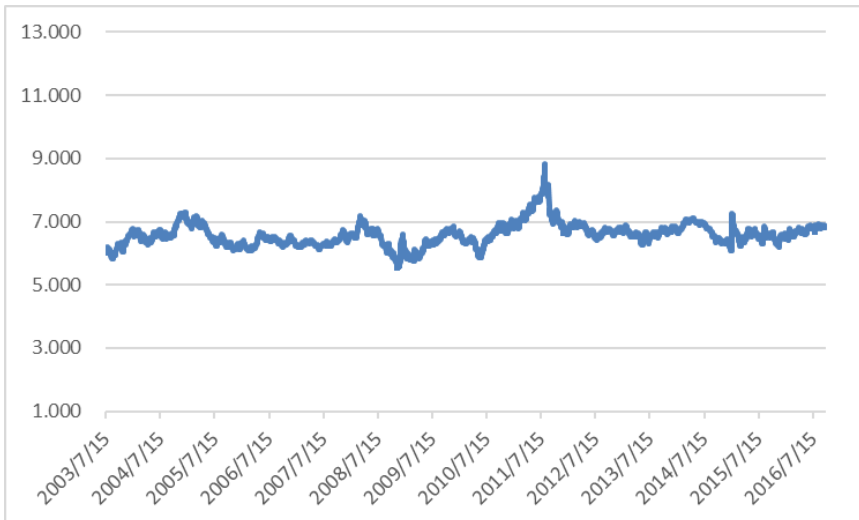


図 2 スイスフラン中国人民元為替レートの推移 (1 スイスフランに対する価格)

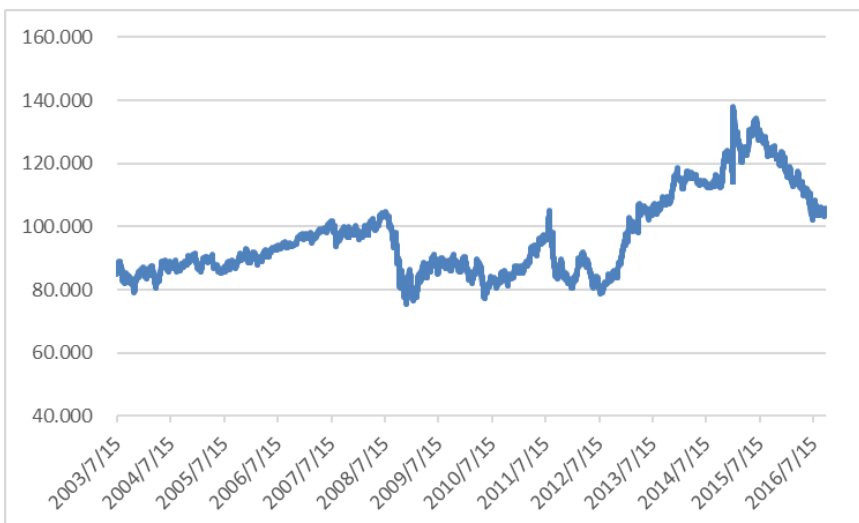


図 3 スイスフラン日本円為替レート (1 スイスフランに対する価格)



図4 スイスフランブラジルリアル為替レート（1 スイスフランに対する価格）

5 解析方法

位相同期の解析方法について述べる。経済データは位相と振幅の情報が混在しており、位相情報を取り出すことが必要となる。そこで、まずはヒルベルト変換を使用し、経済データから瞬時的な位相情報を得る。ここで、瞬時的な位相情報とは時間を通じた位相の情報である。二つの為替レートから得られた位相を比較し、時間を通じて位相が一定距離を保っている場合は、位相同期が生じていると判断できる。

5.1 ヒルベルト変換

経済データは実信号であり、実信号のまま位相と振幅の情報を区別するのは難しい。そこで、得られた経済データに対応する複素信号を定義する。複素平面上的各複素信号では原点から各複素信号までの長さを振幅、原点から各複素信号までのベクトルと実軸の成す偏角が位相となる。つまり、実信号の経済データから複素信号を推定することができれば、経済データの位相と振幅の情報を区別することができる。本研究ではその推定にヒルベルト変換を用いる。定義された複素信号の虚部は位相が $\pi/2$ 遅れた同じ振幅を持つ複素信号の実部に等しい。ヒルベルト変換はこのような $\pi/2$ 遅れた信号を実信号から作成する。ヒルベルト変換は以下のとおりである[1]。

$$\begin{aligned}
 s_H(t) &= \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \\
 &= s(t) * \frac{1}{\pi t}
 \end{aligned}$$

ここで、 $s_H(t)$ は t 期のヒルベルト変換、P.V.はコーシーの主値積分、 $s(t)$ は t 期の実信号、 $*$ は畳みこみ積分を表す。元の経済データを実部、ヒルベルト変換によって作成された信

号を虚部に持つ複素信号を作成する。このとき、複素信号は正の周波数成分を持つと仮定しており、このような複素信号を解析信号と呼ぶ。解析信号は以下で表される。

$$\xi(t) = s(t) + is_H(t)$$

有限長の時系列データに対してヒルベルト変換を行うと両端に異常値が生じる。両端の推定値を 100 期程除くことで推定誤差が約 0.001 以下に収まるため、推定値の両端 100 期を除いている。また、瞬時位相は以下の式に従って計算される。

$$\phi(t) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{s_H(t)}{s(t)}\right) & (s(t) \geq 0) \\ \tan^{-1}\left(\frac{s_H(t)}{s(t)}\right) + \pi & (s(t) < 0) \end{cases}$$

瞬時位相の値域は $-\pi < \phi(t) \leq \pi$ であるため、 $\pm\pi$ で不連続となる。これは二つの位相の差を計算した際に、急なジャンプを生じさせる原因となる。そのため、以下の解析では $\pm\pi \pm 2n\pi$ で連続となるように修正したアンラップ瞬時位相を使用する。ここで、 n は0以外の自然数である。つまり、アンラップ瞬時位相の値域は $-\infty \sim \infty$ となる。

5.2 瞬時位相差と巡回相対位相

得られた二つのアンラップ瞬時位相から瞬時位相差を求める。二つのアンラップ瞬時位相 $\phi_1(t)$ と $\phi_2(t)$ の瞬時位相差は以下のように表される。

$$\psi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$$

$\phi_1(t)$ と $\phi_2(t)$ が同期している場合、 $|\psi(t)| < c$ となる。ここで c は十分小さな定数である。つまり、 $\psi(t)$ が平坦なほど同期が生じていると考えられる。

$\psi(t)$ の平坦性の程度について考える。まず、巡回相対位相を計算する。巡回相対位相は以下のとおりである。

$$\Psi(t) = \psi(t) \bmod 2\pi$$

$\Psi(t)$ の平坦性は $\psi(t)$ の平坦性を反映しており、この平坦性が強いほど二つの為替レートの同期レベルは高いと考えられる。以下では、 $\Psi(t)$ の平坦性の程度を測る二つの同期指標を説明する。

5.3 シヤノンエントロピー（平均情報量）を使用した同期指標

シヤノンエントロピーを使用した同期指標を示す[6]。まず、 $\Psi(t)$ のヒストグラムを作る。 $\Psi(t)$ が平坦であれば、ヒストグラムは単峰分布に近づく。逆に、 $\Psi(t)$ が $-\pi \sim \pi$ の一樣乱数に従う場合、ヒストグラムは一樣分布に近づく。ヒストグラムがどれほど単峰分布または一樣分布に近いかを定量化することで $\Psi(t)$ の平坦性を測ることができる。

そのために自己情報量を考える。ある事象 k が生じる確率を $p(k)$ とする。その時、自己情報量は以下のように定義される。

$$\ln \frac{1}{p(k)} = -\ln p(k)$$

自己情報量は事象 k の持つ情報量を表す。 k の確率が低い場合は多くの情報量を持ち、 k の確率が高い場合、情報量は少ない。この自己情報量の期待値はシャノンエントロピーと呼ばれる。シャノンエントロピーは以下のとおりである。

$$H(\Psi(t)) = -\sum_{k=1}^N p(k) \ln p(k)$$

ここで N はヒストグラムの特数を表す。 $\Psi(t)$ のヒストグラムが一様分布に従うとき、 $H(\Psi(t)) = \ln N$ となる。 $\Psi(t)$ が完全な単峰分布に従う（ヒストグラムの一つの特の中に入れて）場合、 $H(\Psi(t)) = 0$ となる。つまり $0 \leq H(\Psi(t)) \leq \ln N$ となる。このシャノンエントロピーを用いて同期指標を以下のように定義する。

$$\rho = \frac{\ln N - H(\Psi(t))}{\ln N}$$

ここでシャノンエントロピーの値域が $0 \leq H(\Psi(t)) \leq \ln N$ のため、 ρ の値域は $0 \leq \rho \leq 1$ となる。 ρ が 0 に近い場合、二つの為替レートは非同期である。 ρ が 1 に近い場合、二つの為替レートには同期が生じている。

5.4 第一フーリエ成分を使用した同期指標

第一フーリエ成分を使用した同期指標を示す[5]。同期指標は以下のとおりである。

$$\gamma^2 = \langle \cos \Psi(t) \rangle^2 + \langle \sin \Psi(t) \rangle^2$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は平均値を表す。 $\Psi(t)$ が $-\pi \sim \pi$ の一様乱数に従う場合、 $-\pi \sim \pi$ の間に値が均等に表れる。このとき γ^2 は 0 に近づく。 $\Psi(t)$ の平坦性が強い場合、値は $-\pi \sim \pi$ の間の一カ所に集まって表れる。このとき γ^2 は 1 に近づく。つまり、 γ^2 が 0 に近い場合、二つの為替レートは非同期である。 γ^2 が 1 に近い場合、二つの為替レートには同期が生じている。

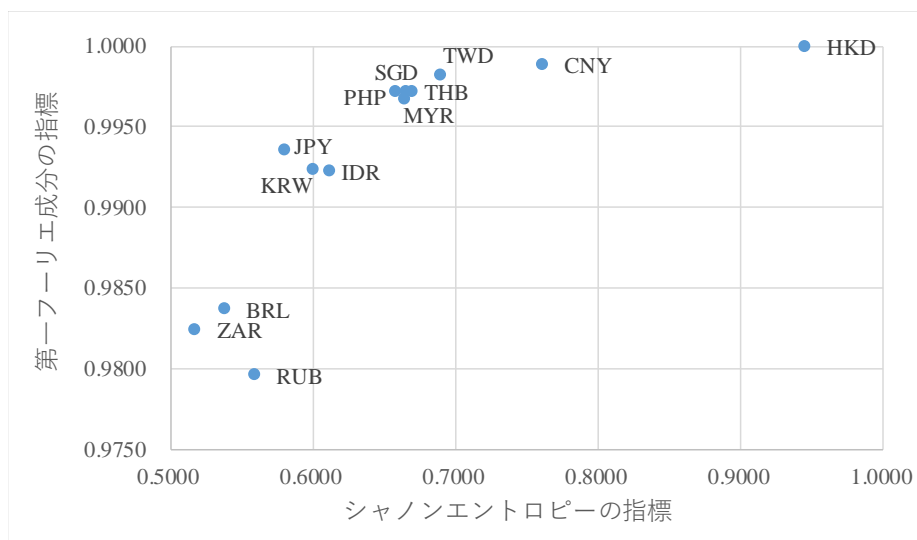
5.5 移動窓解析とヒストグラムの特数

本研究では為替レートの同期レベルの時間変化に興味がある。そこで上記の同期指標の解析に対して移動窓解析を行う。窓長は 101 とし、 1 期ずつ移動させている。次に、ヒストグラムの特数の決め方について考える。ヒストグラムの特数を増やすほどシャノンエントロピーを使用した同期指標は 1 から遠ざかる。実際に解析を行うと、全ての為替レートは高い同期レベルを示し、特数が少ない場合には同期指標の殆どの結果が 1 となる。これでは相対的評価を行うことができない。相対的評価とは、例えば米ドルと中国人民元の同期レベルと米ドルと日本円の同期レベルの比較である。そこで、ヒストグラムの特数は 300 とし、 1 から十分遠ざかるように設定した。

6 結果

図5は米ドルと他通貨の同期指標の平均値をまとめたものである。縦軸に第一フーリエ成分の同期指標、横軸にシャノンエントロピーの同期指標をとっており、右上にいくほど米ドルとの同期が強いということになる。為替レートは全体的に米ドルと強い同期が生じていることが分かる。以下では、米ドルとの同期レベルに基づいて、結果を四つのグループに分ける。

第一グループは香港ドルと中国人民元である。この二通貨は特に強い同期レベルを示した。これは二つの国の為替相場制度が米ドルに対して一定の変動幅で固定する制度を行っているためだと考えられる。第二グループはシンガポールドル、タイバーツ、台湾ドル、フィリピンペソ、マレーシアリングギットである。これらの通貨は東アジアの中でも米ドルに強い影響を受けているグループだと考えられる。第三グループは、インドネシアルピア、韓国ウォン、日本円である。日本は変動相場制度であり、また東アジア通貨の中では米ドルと日本円は異なる動きをすることが知られている。このグループに入った通貨は、他の東アジア通貨と比較し、米ドルからそれほど強い影響を受けていないと考えられる。第四グループは南アフリカランド、ブラジルレアル、ロシアルーブルである。これらは他の通貨に比べ、米ドルに影響を受けない通貨である。そのため、弱い同期レベルが示されている。



BRL：ブラジルレアル、CNY：中国人民元、HKD：香港ドル、IDR：インドネシアルピア、JPY：日本円、KRW：韓国ウォン、MYR：マレーシアリングギット、PHP：フィリピンペソ、RUB：ロシアルーブル、SGD：シンガポールドル、THB：タイバーツ、TWD：台湾ドル、ZAR：南アフリカランド

図5 米ドルとの同期レベル

7 結論

7.1 結果の考察

まず、為替レートの中に強い同期が生じていることが分かる。これは米ドルにあまり影響を受けないと考えられる通貨でさえも、同期指標が高い値を示すことから示唆される。この理由として、ほとんどの為替レートが大局的なトレンドに影響を受けており、周波数デチューニングが小さいためだと考えられる。

相対的な比較を行うと、東アジアは全体的にドルに対して強い影響を受けていることが分かる。その中でも、米ドルに対する介入を行っている国は特に高い同期レベルを示した。他の通貨については、日本円のように東アジアの中では米ドルの動きにあまり影響を受けないグループとシンガポールドルなどのある程度影響を受けるグループに分けられた。この同期レベルの並びは経済学的に整合性のとれた結果である。

最後に、東アジアはアジア通貨危機を経験し、その原因の一つがドル依存体制であった。しかし、ドル依存の脱却はあまり進んでいないと考えられる。中国は2005年から中国人民元の国際通貨化を目指し資本市場の規制緩和などを行っている。国際通貨とは、国際取引等でよく用いられる通貨のことである。また2016年には中国人民元がSDRのバスケットに採用された。SDRはIMF（国際通貨基金）の国際準備資産のことである。SDRの価値を決める通貨バスケットに採用されることはその通貨が国際通貨として認知されたことを示す。つまり、中国人民元の影響力が増してきたことを示唆している。将来的に東アジア通貨は中国人民元との同期レベルが上昇し、相対的に米ドルとの同期レベルが低下する可能性があると考えられる。

7.2 問題点と展望

本分析は米ドルのみを対象としているが、国際通貨と東アジア通貨の連動性を線形回帰モデルによって分析した[2, 3]とほぼ同じ結果であった。先行研究との差異として、以下の二点が考えられる。第一に、時々刻々の同期レベルの定量化を行った点である。線形回帰モデルでは、係数を推定するためある程度の期間を必要とする。第二に、多重共線性の影響を受けない点である。線形回帰モデルでは相関の高い変数を説明変数に多く含むと、推定に問題が生じる。これを多重共線性と呼ぶ。しかし、本分析では二通貨間の同期レベルの定量化を行っているため、そのような問題に影響を受けない。結果から示されたとおり、為替レートの同期レベルは全体的に高いため、多重共線性が生じやすいと考えられる。そのため、多重共線性の影響を受けない点はメリットとなる。

しかし問題点として、同期が生じる要因については本分析からは示されなかった。これは線形回帰モデルの手法にも共通する問題である。為替レートに同期が生じる主な要因としては、通貨当局による介入や経済構造の類似性が考えられる。この問題に対して、現在各国の瞬時振幅に焦点を当てた解析を行っている。ヒルベルト変換により位相と振幅の情報を

区別したが、先行研究では位相と振幅の区別は行っていない。本研究は位相に対して焦点を当てており、これは先行研究と同じく連動性を分析することに該当する。瞬時振幅は時間を通じた為替レートの振幅を表しており、これを解析することで、同期の生じる要因が通貨当局の介入によるものか経済的類似性によるものなのかを区別できると予想している。もし、同期の生じる要因を区別できるような結果が得られれば同期現象の手法を用いる大きなメリットとなる。

謝辞

本研究の一部は、JST さきがけ「社会的課題の解決に向けた数学と諸分野の協働」に基づく。本研究に際して、一橋大学大学院商学研究科教授の小川先生より有益なご助言を戴いた。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- [1] L. Cohen, *TIME-FREQUENCY ANALYSIS*, Prentice Hall, 1995. (吉川昭, 佐藤俊輔訳 『時間一周波数解析』 朝倉書店, 1998年。)
- [2] J. A. Frankel and S. J. Wei., Yen Bloc or Dollar Bloc? East Asian Exchange Rate Policies. T. Ito and A. Kruger eds, *Macroeconomic Linkage, Savings, Exchange Rates, and Capital Flows*, NBER East Asia Seminar on Economics, Vol.3, pages 295-333, The University of Chicago Press, 1994.
- [3] E. Ogawa and T. Yoshimi, Widening deviation among East Asian currencies. *RIETI Discussion Paper*, 2008.
- [4] A. Pikovsky, M. G. Rosenblum and J. Kurths, *Synchronization : A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, New York, 2001. (徳田功訳 『同期理論の基礎と応用 数理科学、化学、生命科学から工学まで』 丸善株式会社, 2009年。)
- [5] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, C. Schäfer and P. A. Tass, Phase synchronization: From theory to data analysis. In F. Moss and S. Gielen, Editors, *Handbook of Biological Physics. Vol. 4, Neuro-informatics*, pages 279-321. Elsevier, Amsterdam, 2001.
- [6] P. Tass, M. G. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler and H.-J. Freund, Detection of $n : m$ phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography. *Phys. Rev. Lett*, 81(15) : 3291-3294, 1998.
- [7] 吉川悠一, 家富裕, 青山秀明, 吉川 洋, 景気・為替レート・物価変動の連関ダイナミクス, *RIETI Discussion Paper*, 2016.