The automorphism group of the countable random graph, tournament and digraph

佐竹 翔平 (Shohei Satake)*

概　要

ランダムグラフ (またはRado グラフ) とよばれる可算無限グラフは, きわめて高い対称性を持つことが知られており, その自己同型群に関して多くの研究がこれまでなされてきた. 本稿では, 自己同型群に関する結果を中心に, ランダムグラフの持つ性質を紹介し, そのトーナメント, 有向グラフ類似の自己同型群に関する著者の結果について述べる.

基本用語, 記法

まず最初に, 本稿で用いるグラフ理論の用語等について紹介する. より詳しくはDiestel [7] 等を参照されたい.

- グラフ G は, 頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G) \subset \binom{V(G)}{2}$ からなる. ただし, $\binom{V(G)}{2} = \{e \subset V(G) \mid |e| = 2\}$. 特に, $|V(G)| < \aleph_0$, $|V(G)| = \aleph_0$ のとき, G をそれぞれ有限グラフ, 可算無限グラフと呼ぶ.

- 有向グラフ D は, 頂点集合 $V(D)$ と辺集合 $E(D) \subset V(D)^2 \setminus \{(u,u) \mid u \in V(D)\}$ からなる. ここで, 辺 $(u,v) \in E(D)$ は u から v に向けて向き付けされた辺とみなす. 特に, 任意の異なる $u, v \in V(D)$ について, $(u,v) \in E(D) \implies (v,u) \notin E(D)$ が成り立つとき, D を向き付けされたグラフという. これに加えて, 任意の異なる $u, v \in V(D)$ について, $(u,v) \in E(D)$ または $(v,u) \in E(D)$ であるとき, D をトーナメントと呼ぶ.

- $u \in V(G)$ について, $N_G(u) := \{v \in V(G) \mid \{u,v\} \in E(G)\}$.

以下は有向グラフについても同様に定義することができる.

- グラフ H が, $V(H) \subset V(G)$ かつ $E(H) = \binom{V(H)}{2} \cap E(G)$ を満たすとき, H を G の誘導部分グラフと呼ぶ. 2 つのグラフ G_1, G_2 に対して, $\sigma : V(G_1) \to V(G_2)$ が $\{u,v\} \in E(G_1) \iff \{u^\sigma, v^\sigma\} \in E(G_2)$ を満たすとき, σ を G_1 と G_2 の同型 (写像) とよぶ. 特に, G_1, G_2 が同一のグラフ G であるとき, σ を G の自己同型とよぶ. G の自己同型全体のなす群を G の自己同型群とよび, $\mathrm{Aut}(G)$ で表す. なお, 恒等写像を自明な自己同型とよぶ.

- 可算無限 Erdős-Rényi ランダムグラフモデルを $\mathcal{G}(\aleph_0, 1/2)$ で表す. すなわち, $\mathbb{N}$ を頂点集合とし, 各 $G \in \mathcal{G}(\aleph_0, 1/2)$ は $\binom{\mathbb{N}}{2}$ の各要素を確率 1/2 で独立に選ぶことで得られる.

---

* 〒464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学大学院情報科学研究科 計算機数理科学専攻
e-mail: satake.shohei@f.mbox.nagoya-u.ac.jp

1. 序

1963年, Erdős-Rényi[8] はほとんどすべての有限グラフが自明な自己同型しか持たないことを示した. さらに [8] ではこれに対し, 次の性質 (RG) を満たす可算無限グラフ R を考察した. R をランダムグラフまたは Rado グラフという.

(RG) 任意の互いに交わらない有限部分集合 $A, B \subset V(R)$ に対し, $\{z, a\} \in E(R)$ かつ $\{z, b\} \notin E(R)$ $(a \in A,\ b \in B)$ なる $z \in V(R) \setminus (A \cup B)$ が存在する.

命題 1.1 (Erdős-Rényi [8])**.**

$$\mathrm{Prob}\left[G \in \mathcal{G}\left(\aleph_0, \frac{1}{2}\right) \mid G \text{ は } (RG) \text{ を満たす}\right] = 1.$$

証明はさほど難しくない. 互いに交わらない有限集合の組 (A, B) を任意にとる. すると, (A, B) に対し, (RG) を満たす z が存在しない確率は $\lim_{i\to\infty}(1-(1/2)^{|A\cup B|})^i = 0$. (A, B) の候補は高々可算個しかないから, 主張が得られる. 無論, $1/2$ を $0 < p < 1$ に置き換えても, 同様の結果が成り立つ.

さて, 詳しくは第2節で述べるが, (RG) は非自明な自己同型の存在を示唆する. よって, 命題 1.1 より, 可算無限ランダムグラフは確率 1 で非自明な自己同型を持つ.

R についてはこれまで, 様々な性質が研究されてきた. 特に自己同型群の性質については $\mathrm{Aut}(R)$ の単純性 [14] や, $|\mathrm{Aut}(R)|$ が $2^{\aleph_0}$ であること, また, 巡回的な自己同型 (正則に作用する巡回置換で表される自己同型) を持つことなどが知られ, Cayley グラフでの表現等についても調べられている.

本稿では, そういった自己同型群に関する性質を中心に, ランダムグラフのいくつかの性質について述べる. また, ランダムグラフのトーナメント, 有向グラフ類似を考えたときの自己同型の性質に関する著者の結果についても概説する. 本稿の構成は以下のとおりである. まず, 第2節では, R のいくつかの性質と構成法を紹介する. 第3節では, $\mathrm{Aut}(R)$ の性質について紹介し, さらに R が所定の条件を満たす群上の Cayley グラフで表されることを示す. 第4節では, R のトーナメント, 有向グラフ類似を定義し, 著者の結果について述べる. 最後に, 第5節では, 関連する話題について紹介する.

2. ランダムグラフの性質, 構成法

まず, R の構成法について紹介する. 本稿ではいくつかのうち, [5] にある整数論的構成法について述べる. $\mathbb{P}$ を $p \equiv 1 \pmod 4$ なる素数 p の集合とし, グラフ $G_\mathbb{P}$ を, $V(G_\mathbb{P}) = \mathbb{P}$, $E(G_\mathbb{P}) = \{\{p, q\} \mid (\frac{p}{q}) = 1\}$ で定義する. ただし, $(\frac{\cdot}{\cdot})$ は平方剰余記号とする. $G_\mathbb{P}$ は $\mathbb{P}$ の取り方より, well-defined である. このとき, $G_\mathbb{P}$ は (RG) をもつ. 実際, 相異なる $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{P}$ について, $a_i \neq 0$ を $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ での平方剰余, $b_j \neq 0$ を $\mathbb{Z}/q_j\mathbb{Z}$ での平方非剰余とする. このとき , 中国剰余定理より, 連立合同式

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \pmod 4 \\ x \equiv a_i & \pmod{p_i}\ (1 \le i \le m) \\ x \equiv b_j & \pmod{q_j}\ (1 \le j \le n) \end{cases}$$

は一意に解 $x \equiv x' \pmod{4p_1\cdots p_m q_1 \cdots q_n}$ を持ち, x' と $4p_1\cdots p_m q_1\cdots q_n$ は互いに素であるから, $x \in \mathbb{P}$ なる解の存在性は算術級数定理から保証される.

次に, R のもつ基本的な性質について紹介する. 他の性質や詳細については Cameron のサーベイ論文 [5] 等を参照されたい.

命題 2.1 (uniqueness)**.** (RG) を満たすグラフは同型を除いてただ一つである.

証明. G_1, G_2 を (RG) を満たすグラフとし, $V(G_1) = \{v_i \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, $V(G_2) = \{w_i \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とする. **往復論法**を用いて, 同型写像を帰納的に構成する. 以下, 写像 f について, f の定義域と値域をそれぞれ $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{ran}(f)$ で表す.

(i) $f_0 : \{v_0\} \to \{w_0\}$ とする.

(ii) i が偶数のとき, w を $V(G_2) \setminus \mathrm{ran}(f_i)$ の中で最小ラベルをもつ頂点とし, $A_i = N_{G_2}(w) \cap \mathrm{ran}(f_i)$, $B_i = \mathrm{ran}(f_i) \setminus A_i$ とする. (RG) より, $\{z, a\} \in E(G_1)$ かつ $\{z, b\} \notin E(G_1)$ $(a \in f_i^{-1}(A_i), b \in f_i^{-1}(B_i))$ なる $z \in V(G_1) \setminus \mathrm{dom}(f_i)$ が存在する. このとき, f_{i+1} を以下のように定義する.

$$f_{i+1}(w) = z,\ f_{i+1}|_{\mathrm{ran}(f_i)} = f_i^{-1}.$$

(iii) i が奇数のとき, v を $V(G_1) \setminus \mathrm{ran}(f_i)$ の中で最小ラベルをもつ頂点とし, $A_i = N_{G_1}(v) \cap \mathrm{ran}(f_i)$, $B_i = \mathrm{ran}(f_i) \setminus A_i$ とする. (ii) と同様に適切な $z \in V(G_2) \setminus \mathrm{dom}(f_i)$ がとれるので, f_{i+1} を以下のように定義する.

$$f_{i+1}(v) = z,\ f_{i+1}|_{\mathrm{ran}(f_i)} = f_i^{-1}.$$

□

この往復論法の議論はいくつかの場面で重要な役割を果たす. 例えば, 次節で述べる通り, 同様の方法で R の非自明な自己同型を構成することができ, さらには R の homogeneity をも導くことができる. また, 次に述べる R の universality も往復論法と類似の議論で導くことができる.

命題 2.2 (universality)**.** 任意の有限, または可算無限グラフ G は R に埋め込める. すなわち, 任意の G は R のある誘導部分グラフと同型である.

3. ランダムグラフの自己同型群

本節では, R の自己同型群に関する結果について紹介する. R の自己同型群に最初に着目したのは, Erdős-Rényi [8] である.

命題 3.1 (Erdős-Rényi [8])**.** R は非自明な自己同型をもつ.

実際, 前頁の往復論法において, $G_1 = G_2 = R$ とすると, 任意の 2 点間からスタートして, 自己同型を作ることができる. さらに, 往復論法の議論を応用して, R が homogeneity を持つことが示せる. 以下についての詳細は, [5] 等を参照されたい.

命題 3.2 (homogeneity)**.** 任意の同型な R の誘導部分グラフ H_1, H_2 について, その間のすべての同型 σ は R の自己同型に拡張できる. すなわち $f|_{V(H_1)} = \sigma$ となる $f \in \mathrm{Aut}(R)$ が無限に存在する.

この性質と次の事実を組み合わせることにより, $|\mathrm{Aut}(R)|$ が導かれる.

事実 3.3. G を可算無限グラフとする. このとき, 以下は同値.

(1) $|\mathrm{Aut}(G)| < \aleph_0$.

(2) ある有限部分集合 $A \subset V(G)$ があって, $\mathrm{Aut}(G)$ における A の固定化部分群が自明となる.

命題 3.4. $|\mathrm{Aut}(R)| = 2^{\aleph_0}$.

証明. $|\mathrm{Aut}(R)| < \aleph_0$ と仮定し, 事実 3.3 (2) に対応する A をとる. A から誘導される部分グラフを $R[A]$ と書く. このとき, 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(R[A])$ は R の homogeneity より, R のある非自明な自己同型に拡張できるので (2) に反する. □

次に, Cayley グラフとしての R について述べる.

定義 3.5. X を群とし, $S \subset X \setminus \{1\}$ とする. このとき, 以下で定義される有向グラフ $\Gamma = \Gamma(X, S)$ を X 上の S に関する Cayley 有向グラフと呼ぶ.

$$V(\Gamma(X,S)) = X,\ E(\Gamma(X,S)) = \{(x,y) \mid xy^{-1} \in S\}$$

とくに, S が逆元について閉じているとき, Γ はグラフとなる. また, $S \cap S^{-1} = \emptyset$ となるようにとれば, Γ は向き付けされたグラフとなり, さらに, $X = \{1\} \cup S \cup S^{-1}$ という条件を課すと, トーナメントになる. ただし, $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$. また, グラフまたは有向グラフ G が, X 上のある Cayley グラフまたは Cayley 有向グラフとして表されるとき, $\mathrm{Aut}(G)$ は, $V(G)$ に正則に作用する, X と同型な部分群を持つ.

さて, 次に述べるように, R は所定の条件を満たす可算無限群上の Cayley グラフとして表されることが知られている.

定理 3.6 (Cameron-Johnson [4])**.** *X を次のような表示を持たない可算無限群とする. ある有限集合 $A \subset X \setminus \{1\}$, $C \subset X$ と 各 $a \in A$ について有限集合 $B_a \subset X$ があって,*

$$X = \left\{ \bigcup_{a \in A} \bigcup_{b \in B_a} \sqrt{a} \cdot b \right\} \cup C.$$

ただし, $\sqrt{a} = \{x \mid x^2 = a\}$. このとき, R は X の Cayley グラフとして表すことができる.

証明の概略は次の通りである. 各 $g \neq 1$ について, $\{g, g^{-1}\}$ を確率 $1/2$ で独立に選んで, 逆元について閉じた $S \subset X \setminus \{1\}$ をランダムに選ぶ (ランダムな S によって定義される Cayley グラフをランダム Cayley グラフとよぶ). 互いに素な有限集合 $V_1, V_2 \subset X$ を任意にとる. 相異なる任意の $v_1, v_2 \in V_1 \cup V_2$ について, $\{zv_1^{-1}, v_1z^{-1}\}$ と $\{zv_2^{-1}, v_2z^{-1}\}$ が独立に選べるような $z \in X \setminus (U \cup W)$ が無限個存在すれば, (RG) が満たされる確率が 1 であることが示せるが, X の条件がそれを保証する. この定理より次の系を得ることができる.

系 3.7 (Cameron-Johnson [4])**.** *上の条件を持つ X について, X 上のランダム Cayley グラフは確率 1 で R と同型となる.*

さらにこれらを加法群 $\mathbb{Z}$ に適用すると, 次を得る.

系 3.8 (Cameron-Johnson [4])**.** *$\mathrm{Aut}(R)$ は無限巡回群を部分群を持つ. さらに, R は互いに共役でない $2^{\aleph_0}$ 個の巡回的な自己同型を持つ.*

4. トーナメント, 有向グラフ

ランダムグラフ R のトーナメント類似 RT は次の定義 (RT) によって与えられる.

(RT) 任意の互いに交わらない有限部分集合 $A, B \subset V(RT)$ に対し, $(z, a) \in E(RT)$ かつ $(z, b) \notin E(RT)$ $(a \in A,\ b \in B)$ なる $z \in V(RT) \setminus (A \cup B)$ が存在する.

また, 向き付けされたグラフへの類似 RO は以下の定義 (RO) によって与えられる.

(RO) 任意の互いに交わらない有限部分集合 $A, B, C \subset V(RO)$ に対し, 以下を満たす $z \in V(RO) \setminus (A \cup B \cup C)$ が存在する.

$$\begin{aligned}
&(z, a) \in E(RO), (a, z) \notin E(RO) && (a \in A),\\
&(b, z) \in E(RO), (z, b) \notin E(RO) && (b \in B),\\
&(z, c), (c, z) \notin E(RO) && (c \in C).
\end{aligned}$$

これらは R と同様, uniqunessとuniversalityを満たすことが同様の議論で確かめられる. まず, RO に関しては, 次の定理がSatake-Sawa-Jimbo [12] で得られている.

定理 4.1 (Satake-Sawa-Jimbo [12]). *$\mathrm{Aut}(RO)$ は無限巡回群を部分群を持つ. さらに, RO は互いに共役でない $2^{\aleph_0}$ 個の巡回的な自己同型を持つ.*

証明は, 定理 3.6と同様にしても得られるが, 我々は, Cameron [5] の, R についての対応する結果における, Baire Categoryの理論を用いた手法を拡張し, 主張を得ることができた. 証明の概略については, 佐竹-澤-神保 [10] も参照されたい.

また, RT についても定理 3.6に対応する結果が知られている.

定理 4.2 (Cameron [6]). *X を位数 2 の元を持たず, 次のような表示を持たない可算無限群とする. ある有限集合 $A, C \subset X$ と 各 $a \in A$ について有限集合 $B_a \subset X$ があって,*

$$X = \left\{ \bigcup_{a \in A} \bigcup_{b \in B_a} \sqrt{a} \cdot b \right\} \cup C.$$

このとき, X 上のランダム Cayleyトーナメントは確率 1 で RT と同型となる. (トーナメントの定義から, X は位数 2 の元は持ちえない).

ここで, ランダム Cayley トーナメントとは, 各 $g \neq 1$ について, g または g^{-1} を確率 1/2で独立に選んで, 適切な $S \subset X \setminus \{1\}$ をランダムに選ぶことで得られるトーナメントを意味する. その後のJaligot-Khelif [9] で, X が位数 2 の元を持たなければ, RT は X 上のCayley トーナメントとして表せることが示されている. [9] の補題を用いて, 我々は [11] で, より強い結果, すなわち系 3.7に当たる結果を示し, 定理 4.2における X の条件が不要であることを観察した.

定理 4.3 (Satake [11]). *X が位数 2 の元を持たないとき, X 上のランダム Cayleyトーナメントは確率 1 で RT と同型となる.*

5. 終わりに

本稿では, R やそのいくつかの類似についての自己同型群に関する側面を見てきた. 本節では, いくつかの関連する話題について述べる.

まずは, モデル理論においては, これらを一般化した Fraïssé limit とよばれる無限構造がよく知られている. 例えばグラフの場合は, ある種のグラフの融合について閉じた有限グラフの集合 $\mathcal{C}$ について, $\mathcal{C}$ に属するグラフすべてを誘導部分グラフに持ち, homogeneous である無限グラフ G が同型を除いて一意に存在する. G を $\mathcal{C}$ に関する Fraïssé limit という. $\mathcal{C}$ を有限グラフすべての集合としたとき, R は $\mathcal{C}$ に関する Fraïssé limit である. 詳細については, [5] 等を参照されたい.

また, 組合せ論においては, R の有限類似である, n-existentially closed (n-e.c.) とよばれる有限グラフが研究されている. このグラフは数理論理学における 0-1 法則の問題においても登場する ([1]). 命題 1.1 と同様にして, すべての $n \in \mathbb{N}$ について, 有限ランダムグラフは確率 1 で n-e.c. であることが示されるが, そのようなグラフの明示的な構成は興味深い問題である. これまでには, 例えば, Weil による指標和の評価を用いた構成など様々な構成法が研究されている (e.g. [2], [13]). 詳細は, [3] 等を参照されたい.

参考文献

[1] N. Alon, J. H. Spencer. The probabilistic method. Fourth edition. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2016.

[2] A. Blass, G. Exoo, F. Harary. Paley graphs satisfy all first-order adjacency axioms. *J. Graph Theory* **5** (1981), no. 4, 435–439.

[3] A. Bonato. The search for n-e.c. graphs. *Contrib. Discrete Math.* **4** (2009), no. 1, 40–53.

[4] P. J. Cameron, K. W. Johnson. An investigation of countable B-groups. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **102** (1987), 223–231.

[5] P. J. Cameron. The random graph in :“The mathematics of Paul Erdős II”, R. L. Graham, J. Nesetril, S. Butler ed., Algorithms and Combinatorics **14**, Springer, Berlin, 1997, 333-351.

[6] P. J. Cameron. Homogeneous Cayley objects. *European J. Combin.* **21** (2000), no. 6, 745–760.

[7] R. Diestel. Graph theory. Fourth ed. Graduate Texts in Mathematics, **173**. Springer, Heidelberg, 2010.

[8] P. Erdős, A. Rényi. Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 295–315.

[9] E. Jaligot, A. Khelif. The random tournament as a Cayley tournament. Aequationes Math. **67** (2004), 73–79.

[10] 佐竹 翔平, 澤 正憲, 神保 雅一. グラフの非対称性に関する Erdős-Rényi の定理とその有向グラフへの拡張 (Japanese). Kokyuroku of RIMS (Kyoto University) **1986** (2016), 130-137.

[11] S. Satake. The asymmetry number of finite tournaments, and some related results. Submitted.

[12] S. Satake, M. Sawa, M. Jimbo. Erdős-Rényi theory for asymmetric digraphs. In preparation.

[13] S. Satake. On Paley-like tournaments and hypergraphs with some prescribed properties. In preparation.

[14] J. K. Truss. The group of the countable universal graph. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **98** (1985), no. 2, 213–245.