圧力安定化法による近似 Navier-Stokes 方程式の考察

松井 蘭丸 (まつい らんまる)

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 数学専攻 博士後期課程 2 年

E-mail: rmatsui@math.tsukuba.ac.jp

1 導入

本講演で，次の Navier-Stokes 方程式 (NS) を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = f, \qquad \nabla \cdot u = 0, & t \in (0,\infty), x \in \Omega, \\ u(0,x) = a, & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{NS}$$

ここで，流速場 $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x))$ と圧力 $\pi(t,x)$ は未知関数，外力 $f(t,x)$ と初期値 a は既知関数である．Navier と Stokes によって導かれた Navier-Stokes 方程式 (NS) の解析は数値解析的にも工学的にも非常に重要なものである．しかしながら，(NS) はミレニアム問題に指定されているが，未だに解決されていない．その理由の一つとしては，圧力 $\nabla\pi$ と非圧縮条件 $\nabla \cdot u = 0$ が挙げられる．

この困難を回避するため，実解析においてはヘルムホルツ分解：

$$L_p(\Omega)^n = L_{p,\sigma}(\Omega) \oplus G_p(\Omega),$$
$$L_{p,\sigma}(\Omega) = \overline{\{u \mid u_j \in C_0^\infty(\Omega),\ \nabla \cdot u = 0\}}^{\|\cdot\|_{L_p}}, \quad G_p(\Omega) = \{\nabla\pi \in L_p(\Omega)^n \mid \pi \in L_{p,loc}(\overline{\Omega})\}$$

によって，非圧縮条件と圧力項を消去するという方法を用いるのが普通である．一方，数値解析においては，いくつかの近似法が使われている．これらの手法は非圧縮条件を近似することで圧力項を取り除いている．例えば非圧縮条件の代わりに，ペナルティ法においては $\nabla \cdot u = -\pi/\alpha(\alpha > 0)$，圧力安定化法においては，$\nabla \cdot u = \Delta\pi/\alpha$，擬似圧縮法においては，$\nabla \cdot u = -\partial_t\pi/\alpha$ がそれぞれ用いられている．本講演において，我々は圧力安定化法により非圧縮条件を近似した次の Navier-Stokes 方程式を考察する：

$$\begin{cases} \partial_t u_\alpha - \Delta u_\alpha + (u_\alpha \cdot \nabla)u_\alpha + \nabla \pi_\alpha = f, \qquad \nabla \cdot u_\alpha = \Delta\pi_\alpha/\alpha, & t \in (0,\infty), x \in \Omega, \\ u_\alpha(0,x) = a, & x \in \Omega, \\ u_\alpha(t,x) = 0, \partial_n \pi_\alpha(t,x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{NSa}$$

(NSa) を (NS) の摂動として捉えるのであるが，$\alpha \to \infty$ を考えると，偏微分方程式の型が変わるということには注意が必要である．圧力安定化法の歴史について触れておこう．この手法は，Brezzi と Pitkäranta [3] によって初めて紹介された．彼らは定常問題を考え，非圧縮条件が $\nabla \cdot u_\alpha = \Delta\pi_\alpha/\alpha$ により近似された Stokes 方程式（Navier-Stokes 方程式を線形化した方程式）について考察し，次の誤差評価を得た：

$$\|u_\alpha - u\|_{H^1(\Omega)} + \|\pi_\alpha - \pi\|_{L_2(\Omega)} \le C\alpha^{-1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)} \tag{1}$$

Nazarov と Specovius-Neugebauer [10] は同様の近似 Stokes 問題を考察し，実補間ノルムを用いたパラメータに依存する Sobolev ノルム

$$\|u; H^{\ell}_{\chi}(\Omega,\varepsilon)\| = \sum_{k=0}^{\ell} \varepsilon^{(k-\chi)_+}\|u; H^k(\Omega)\| + \|u; H^{\chi}(\Omega)\|$$

を定めることで，境界が $C^{\ell+2}$ のクラスであるような 3 次元有界領域 Ω において，この問題の解に対し $\alpha \to \infty$ としたときの漸近的な評価

$$\left\| u_\alpha - u : H^{\ell+1}_{\chi-\delta+1}\left(\Omega, \frac{1}{\alpha}\right)^3 \right\| + \left\| \pi_\alpha - \pi; H^{\ell}_{\chi-\delta}\left(\Omega, \frac{1}{\alpha}\right) \right\| \le C\alpha^{-\delta}\|f; H^{\ell}(\Omega)^3\|$$

を導出した．ここで，$t_+ = 2^{-1}(t+|t|)$，$\chi \in [0, 3/2)$，$\delta \in [0, \chi]$ である．特に $\ell = 0$，$\chi = \delta = 1$ にとると，

$$\|u_\alpha - u\|_{H^1(\Omega)} + \|\pi_\alpha - \pi\|_{L_2(\Omega)} \le C\alpha^{-1}\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

となる．しかしこれらの結果はエネルギー法を適用していて，関数空間がより一般の場合には適用できない．非定常問題に関する結果としては，Prohl [11] によって次の結果が得られている．

$$\|u_\alpha - u\|_{L_\infty((0,T),H^1(\Omega))} + \|\pi_\alpha - \pi\|_{L_\infty((0,T),L_2(\Omega))} \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

しかし，これらの評価はそのすべてが時間 L_2（もしくは L_∞），空間 L_2 におけるものである．数値解析においてはこの評価で十分であるが，我々の目的はこれを実解析的な手法を用いて時間 L_p，空間 L_q に一般化することである．したがって我々の興味は，L_p-L_q 枠における (NSa) の解 (u_α, π_α) と (NS) の解 (u, π) に対する誤差評価である．

本講演では，柴田，清水 [13] による手法を使って，縮小写像の原理と近似線形方程式の L_p-L_q 最大正則性から近似非線形方程式に対する時間局所解の一意存在を示すことができたので，それを紹介する．ここで，近似線形方程式に対する L_p-L_q 最大正則性は，線形化問題に対応するレゾルベント問題の解公式と Fourier multiplier theorem からわかる $\mathcal{R}$ 有界な解作用素の存在定理を用いて導出する．

2　主結果

(NSa) に対する時間局所解の一意存在定理を述べる．まずは，講演を通じて用いる関数空間や表記に関して紹介しよう．

任意の 2 つのバナッハ空間 X，Y に対して，$\mathcal{L}(X, Y)$ は X から Y への有界線形作用素全体の集合を表すものとし，$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ と略記する．$\mathrm{Hol}(U, X)$ は複素領域 U 上の X 値正則関数全体の集合とおく．任意の領域 D，バナッハ空間 X，$1 \le q \le \infty$ に対して，$L_q(D, X)$ を D 上で定義された X 値ルベーグ可測関数とし，$\|\cdot\|_{L_q(D,X)}$ をそのノルムとする．混乱がない限り，$L_q = L_q(D, \mathbb{R})$，$\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{L_q(D,\mathbb{R})}$ と略記する．同様にして，$1 \le q \le \infty$ と正の整数 m に対して，$W^m_q(D, X)$ を D 上で定義された X 値ソボレフ空間とする．初期値の属する空間として，$1 \le p, q \le \theta$，$0 < \theta < 1$ に対して，実補

間空間 $B^{2(1-1/p)}_{q,p}(D)$ を次のように定義する：$B^{2(1-1/p)}_{q,p}(D) = (L_q(D), W^2_q(D))_{1-1/p,p}$.
線形化方程式の評価をするため，バナッハ空間 Y に対して，

$$L_{p,\gamma_0,(0)}(\mathbb{R}, Y) = \{f(t) \in L_{p,loc}(\mathbb{R}, Y) \mid f(t) = 0\ (t < 0), \|e^{-\gamma t} f\|_{L_p(\mathbb{R},Y)} < \infty,\ (\gamma \geq \gamma_0)\},$$
$$W^1_{p,\gamma_0,(0)}(\mathbb{R}, Y) = \{f(t) \in L_{p,\gamma_0,(0)}(\mathbb{R}, Y) \mid \partial_t f(t) \in L_{p,\gamma_0}(\mathbb{R}, Y)\}$$

とおく．圧力項を扱うためには，次の関数空間を用いる：

$$L_{q,\mathrm{loc}}(D, X) = \{f : D \to X \mid f|_K \in L_1(K),\ K \text{ は } D \text{ 上の任意のコンパクト集合 }\}.$$
$$\widehat{W}^m_q(D, X) = \{\theta \in W^{m-1}_{q,\mathrm{loc}}(D, X) \mid \nabla\theta \in W^{m-1}_q(D, X)^n\}.$$

ここで，$W^0_{q,\mathrm{loc}}(D, X) = L_{q,\mathrm{loc}}(D, X)$ である．

我々の証明は Fourier 解析を基礎としているので，Fourier 変換，Fourier 逆変換，Laplace 変換，Laplace 逆変換をそれぞれ

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}_x[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \qquad \mathcal{F}^{-1}_\xi[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} f(\xi)d\xi,$$
$$\mathcal{L}_t[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt = \mathcal{F}_t[e^{-\gamma t} f(t)](\tau), \quad \mathcal{L}^{-1}_\tau[f](t) = e^{\gamma t}\mathcal{F}^{-1}_\tau[f](t),$$

で定義する．ここで，$x, \xi \in \mathbb{R}^n$，$\lambda = \gamma + i\tau \in \mathbb{C}$ であり，$x\cdot\xi$ は内積：$x\cdot\xi = \sum_{j=1}^n x_j\xi_j$ とした．さらに，Fourier-Laplace 変換を次のように定義する：

$$\mathcal{L}_t[\mathcal{F}_x[v(t,x)]](\lambda,\xi) = \mathcal{F}_{t,x}[e^{-\gamma t}v(t,x)](\lambda,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\lambda t + ix\cdot\xi)} v(t,x)dx\right)dt.$$

また，作用素 Λ^s_γ は

$$(\Lambda^s_\gamma f)(t) = \mathcal{L}^{-1}[|\lambda|^s\mathcal{L}[f](\lambda)](t) = e^{\gamma t}\mathcal{F}^{-1}_\tau[(\tau^2+\gamma^2)^{s/2}\mathcal{F}_t[e^{-\gamma t}f(t)](\tau)](t).$$

を表す．次の主結果が，(NSa) に対する時間局所解に関する定理である．

定理 2.1. $n \geq 2$，$n/2 < q < \infty$，$\max 1, n/q \leqq p < \infty$，$\alpha > 0$，$T_0 \in (0,\infty)$ とおく．また，r は $1/p - 1/r \leq 1/2$ を満たす定数とする．任意の $M > 0$ に対して，$a \in B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathbb{R}^n)$，$f \in L_p((0,T_0), L_q(\mathbb{R}^n))$ は

$$\|a\|_{B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_p((0,T_0),L_q(\mathbb{R}^n))} \leq M \tag{2}$$

にとる．このとき，M に依存する定数 $T^* \in (0,T_0)$ が存在して，(NSa) は次のクラスの一意解 (u_α, π_α) をもつ：

$$u_\alpha \in W^1_p((0,T^*), L_q(\mathbb{R}^n)^n) \cap L_p((0,T^*), W^2_q(\mathbb{R}^n)^n), \quad \pi_\alpha \in L_p((0,T^*), \widehat{W}^1_q(\mathbb{R}^n)).$$

さらに，次の評価が成立する：

$$\|u_\alpha\|_{L_\infty((0,T^*),L_q(\mathbb{R}^n))} + \|\nabla u_\alpha\|_{L_r((0,T^*),L_q(\mathbb{R}^n))} + \|\nabla^2 u_\alpha\|_{L_p((0,T^*),L_q(\mathbb{R}^n))} \leq C_{n,p,q,T^*},$$
$$\|\nabla\pi_\alpha\|_{L_\infty((0,T^*),L_q(\mathbb{R}^n))} \leq \alpha C_{n,p,q,T^*}$$

注意 2.2. (NSa) に対する考察と同様にして，次の誤差評価を得ることができる：

$$\|u - u_\alpha\|_{L_p((0,T^\flat),L_q(\Omega))} \leq C\alpha^{-1}.$$

ここで，u，u_α はそれぞれ (NS)，(NSa) の解である．

3 証明の概略

定理 2.1 を示すために，我々は縮小写像の原理と，(NSa) に対応する線形化問題

$$\begin{cases} \partial_t u_\alpha - \Delta u_\alpha + \nabla \pi_\alpha = f, & \nabla \cdot u_\alpha = \Delta \pi_\alpha / \alpha \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ u_\alpha(0,x) = a_\alpha & x \in \Omega \end{cases} \tag{Sa}$$

に対する L_p-L_q 最大正則性に関するいくつかの定理を用いる．

一つ目の定理は，$a = 0$ に対する (Sa) の L_p-L_q 最大正則性定理である．

定理 3.1. $1 < p, q < \infty$，$\gamma_0 \geq 0$ とおく．任意の $f \in L_{p,\gamma_0,(0)}(\mathbb{R}, E_{q,r_0}(\Omega))$ に対して，$a_\alpha = 0$ に対する (Sa) は一意解

$$u_\alpha \in L_{p,\gamma_0,(0)}((0,\infty), W_q^2(\Omega)^n) \cap W^1_{p,\gamma_0,(0)}(\mathbb{R}, L_q(\Omega)^n), \quad \pi_\alpha \in L_{p,\gamma_0,(0)}((0,\infty), L_q(\Omega))$$

をもつ．さらに，任意の $\gamma \geq \gamma_0$ に対して，次の評価が成立する：

$$\|e^{-\gamma t}(\partial_t u_\alpha, \gamma u_\alpha, \Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} \nabla u_\alpha, \nabla^2 u_\alpha, \nabla \pi_\alpha)\|_{L_p(\mathbb{R}, L_q)} \leq C_{n,p,q} \|e^{-\gamma t} f\|_{L_p((0,\infty),L_q)}.$$

(Sa) に対する主結果 (定理 3.7 と定理 3.1) を示すために，作用素値の Fourier multiplier theorem を用いる（Weis [16]）．この定理は，解作用素に対する $\mathcal{R}$ 有界性を必要とする．したがって，まずは $\mathcal{R}$ 有界の概念を定義しよう．

定義 3.2. 作用素の族 $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ が $\mathcal{L}(X,Y)$ 上で $\mathcal{R}$ であるとは，正定数 $C > 0$ と $p \in [1,\infty)$ があって，任意の $n \in \mathbb{N}$，$T_j \in \mathcal{T}$，$f_j \in X$ $(j = 1, \ldots, n)$ と $[0,1]$ 上独立対称な任意の $\{-1,1\}$ 値確率変数 $\{\gamma_j(u)\}_{j=1}^n$ に対し，

$$\int_0^1 \| \sum_{j=1}^N \gamma_j(u) T_j f_j \|_Y^p du \leq C \int_0^1 \| \sum_{j=1}^N \gamma_j(u) f_j \|_X^p du.$$

が成立するときをいう．この定数 C の下限を $\mathcal{L}(X,Y)$ 上における $\mathcal{T}$ の $\mathcal{R}$*-bound* といい，$\mathcal{R}(\mathcal{T})$ で表す．

注意 3.3. 定義 3.2 から，作用素の族は $\mathcal{R}$ 有界ならば一様有界である．

$$\|T\|^p_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y^p \leq \mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

次の定理が Weis [16] によって示された作用素値の Fourier multiplier theorem である．

定理 3.4. $1 < p, q < \infty$，$X = Y = L_q(\Omega)$ とし，$M(\tau) \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathcal{L}(X,Y))$ は次の条件を満たすものとする．

$$\mathcal{R}(\{M(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}) = c_0 < \infty, \quad \mathcal{R}(\{|\tau| M(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}) = c_1 < \infty.$$

このとき，

$$[T_M f](t) = \mathcal{F}^{-1}[M(\tau)\mathcal{F}[f](\tau)](t) \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X))$$

で定義された T_M は $L_p(\mathbb{R},X)$ から $L_p(\mathbb{R},Y)$ への有界作用素である．さらに，次の評価が成立する：

$$\|T_M f\|_{L_p(\mathbb{R},Y)} \leq C(c_0+c_1)\|f\|_{L_p(\mathbb{R},X)} \qquad (f \in L_p(\mathbb{R},X)),$$

ここで，C は p, X に依存する定数である．

定理 3.4 を適用して，L_p-L_q 最大正則性を示すためには，次のレゾルベント問題の解作用素に対する $\mathcal{R}$ 有界性が必要となる：

$$\lambda u_\alpha - \Delta u_\alpha + \nabla \pi_\alpha = f, \quad \nabla\cdot u_\alpha = \frac{\Delta \pi_\alpha}{\alpha} \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{RSE}$$

ここで，レゾルベントパラメータ λ は $\Sigma_{\varepsilon,\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid |\arg\lambda| < \pi-\varepsilon, |\lambda| \geq \lambda_0\}$ $(0 \leq \varepsilon < \pi/2, \lambda_0 > 0)$ に属しているものとする．(RSE) の第 2 式を $\Delta\pi_\alpha = \alpha\nabla\cdot u_\alpha$ と見れば，Laplace 方程式の一意可解性からこれは $\mathbb{R}^n$ において $\nabla\pi_\alpha = \alpha u_\alpha$ とできる．

したがって，(RSE) は次の方程式系に書き換えることができる．

$$\lambda u_\alpha - \Delta u_\alpha + \alpha u_\alpha = f, \quad \nabla\pi_\alpha = \alpha u_\alpha \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{RSE2}$$

(RSE2) に Fourier 変換を施し，Fourier multiplier theorem を適用することにより，次の (RSE) に対する $\mathcal{R}$ 有界作用素の存在定理を示すことができる．

定理 3.5. $\alpha > 0$，$1 < q < \infty$，$0 < \varepsilon < \pi/2$ とする．このとき，$\lambda_0 > 0$ と

$$\mathcal{U}(\lambda) \in \mathit{Hol}(\Sigma_{\varepsilon,\lambda_0}, \mathcal{L}(L_q(\mathbb{R}^n), W_q^2(\mathbb{R}^n)^n)), \quad \mathcal{P}(\lambda) \in \mathit{Hol}(\Sigma_{\varepsilon,\lambda_0}, \mathcal{L}(L_q(\mathbb{R}^n), \widehat{W}_q^1(\mathbb{R}^n)))$$

を満たす作用素の族 $\mathcal{U}(\lambda)$，$\mathcal{P}(\lambda)$ が存在して，任意の $f \in L_q(\mathbb{R}^n)$，$\lambda \in \Sigma_{\varepsilon,\lambda_0}$ と $(u_\alpha, \pi_\alpha) = (\mathcal{U}(\lambda)f, \mathcal{P}(\lambda)f)$ に対して (RSE) は一意解をもち，$(\mathcal{U}(\lambda), \mathcal{P}(\lambda))$ は次の評価を満たす：

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}(L_q(\mathbb{R}^n), L_q(\mathbb{R}^n)^{n+n^2+n^3})}(\{(\tau\partial_\tau)^\ell(G_{\lambda+\alpha}\mathcal{U}(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma_\varepsilon)\} \leq C \ (\ell = 0, 1),$$
$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}(L_q(\mathbb{R}^n), L_q(\mathbb{R}^n)^n)}(\{(\tau\partial_\tau)^\ell(\nabla\mathcal{P}(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma_\varepsilon)\} \leq C \ (\ell = 0, 1).$$

ここで，$G_\lambda u = (\lambda u, \lambda^{1/2}\nabla u, \nabla^2 u)$ である．

注意 3.3 によって，我々は (RSE) に対する次のレゾルベント評価を示すことができる．

系 3.6. $\lambda \in \Sigma_\sigma$ とし，(u_α, π_α) を (RSE) の一意解とする．このとき，任意の $f \in L_q(\Omega)$ に対して，次の不等式が成立する．

$$\|(|\lambda|u_\alpha, |\lambda|^{1/2}\nabla u_\alpha, \nabla^2 u_\alpha, \alpha u_\alpha, \nabla\pi_\alpha)\|_q \leq C\|f\|_q.$$

$\mathcal{A}_\alpha$ を $\mathcal{A}_\alpha u_\alpha = \Delta u_\alpha - \alpha u_\alpha$ で定義された線形作用素とし，$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\alpha) = W_q^2(\Omega)$ とする．

系 3.6 により，$\mathcal{A}_\alpha$ は $L_q(\Omega)$ 上で半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ を生成することがわかる．さらに，ある定数 $\lambda_1 \geq 0$ と $M > 0$ があって，任意の $a \in B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$u_\alpha(t) = T_\alpha(t)a$ は次の評価を満たす：

$$\left\|\left(T_\alpha(t)a, t^{1/2}\nabla T_\alpha(t)a, t\nabla^2 T_\alpha(t)a\right)\right\|_q \leq Me^{\lambda_1 t}\|a\|_q.$$

$\pi_\alpha = K(u_\alpha)$ を $u_\alpha = T_\alpha(t)a$ から定まる圧力とすれば，(u_α, π_α) は (Sa) を満たす．実補間により，次の $f = 0$ のときの (Sa) に対する L_p-L_q 最大正則性定理を得る．

定理 3.7. $1 < p, q < \infty$ とおく．$a \in B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathbb{R}^n)$ に対して，$T_\alpha(t)a$ は次の評価を満たす：

$$\|(\partial_t T(t)a, \nabla^2 T(t)a)\|_{L_p((0,\infty),L_q)} \le C_{n,p,q}\|a\|_{B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathbb{R}^n)},$$
$$\gamma^{1/p}\|e^{-\gamma t}T(t)a\|_{L_p((0,\infty),L_q)} \le C_{n,p,q}\|a\|_{L_q(\mathbb{R}^n)},$$
$$\gamma^{1/(2p)}\|e^{-\gamma t}\nabla T(t)a\|_{L_p((0,\infty),L_q)} \le C_{n,p,q}\|a\|_{B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

ここで $\gamma > 0$ は任意である．

注意 3.8. 一般の領域 Ω においては，ラプラス方程式 $\Delta p = g$ in Ω，$\partial_n p = 0$ on $\partial\Omega$ の一意可解性と熱方程式 $\partial_t u - \Delta u = f$ in Ω の最大正則性が保証されていれば同様の議論が成り立つ．

参考文献

[1] 柴田良弘, 久保隆徹:「非線形偏微分方程式」(朝倉書店, 2012).

[2] S. Boyaval, M. Picasso: “*A posteriori analysis of the Chorin-Temam scheme for Stokes equations*”, C.R.Acad. Sci. Paris, Ser., I, 351, pp.931-936, (2013).

[3] F. Brezzi and J. Pitkäranta:“*On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations*”, in W.Hackbush, editor, ”Efficient Solutions of Elliptic Systems,” Vol. 10, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Braunschweig, (1984).

[4] A. J. Chorin: “*On the convergence of discrete approximations to Navier-Stokes equations*”, Math. Comput. 23, pp.341-353, (1969).

[5] Y. Enomoto, Y. Shibata: “*On the $\mathcal{R}$-sectoriality and the Initial Boundary Value Problem for the Viscous Compressible Fluid Flow*”, Funkcialaj Ekvacioj, 441-505, (2013).

[6] R. Farwig and H. Sohr: “*Generalized resolvent estimates for the Stokes system in bounded and unbounded domains*”, J. Math. Soc. Japan, 46, 607-643, (1994).

[7] N. Kharrat, Z. Mghazli:“*Residual error estimators for the time-dependent Stokes equations*”, C.R.Acad. Sci. Paris,Ser. , I, 340, pp.405-408, (2005).

[8] N. Kharrat, Z. Mghazli: “*A posteriori error analysis of time-dependent Stokes problem by Chorin-Temam scheme*”, Springer-Verlag, Calcolo, 49, pp.41-61, (2012).

[9] T. Kubo, Y. Saitou, Y. Shibata: “*On generalized resolvent estimates for the approximated Stokes system in bounded and unbounded domains by penalty methods*”, (preprint).

[10] S. A. Nazarov and M. Specovius-Neugebauer:*”Optimal results for the Brezzi-Pitkäranta approximation of viscous flow problems”*, Differential and Integral Equations, Vol. 17, 1359-1394, (2004).

[11] A. Prohl: “Projection and Quasi-Compressiblility Methods for Solving the Incompressible Navier-Stokes Equations” (Advances in Numerical Mathematics, 1997).

[12] Y. Shibata: “*Generalized Resolvent Estimates of the Stokes Equations with First Order Boundary Condition in a General Domain*”, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 1-40, (2013).

[13] Y. Shibata, S. Shimizu: “*On the maximal $L_p - L_q$ regularity of the Stokes problem with first order boundary condition; model problems*”, The Mathematical Society of Japan, Vol. 64, No.2, pp.561-626, (2012).

[14] R. Temam:Navier-Stokes equations (North-Holland, 1984).

[15] R. Temam: "*Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionaires II*", Arch. Ration. Mech. Anal. 33, pp.377-385, (1969).

[16] L. Weis: "*Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity*", Math.Ann., 319, 735-758, (2001).