

不変周期点代数多様体の“成分”と再帰方程式の“基本領域”の双対性

弓林 司*(Tsukasa YUMIBAYASHI)
首都大学東京理工学研究科物理学専攻

概要

本講演では、不変周期点代数多様体の“周期的に振る舞う部分集合による分解”と、再帰方程式が定義する“空間の対称性の基本領域による分解”の間の双対性について与える。本講演は arXiv:1504.07548[1] に基づく。

1 序論

1.1 不変周期点代数多様体 (IVPP)

まず本発表の1つ目の主題である不変周期点代数多様体について紹介する。

d 次元写像 $F : x^t \mapsto x^{t+1}, x^t, x^{t+1} \in \mathbb{C}^d$ が p 個不変量 $r : x \rightarrow r(x)$ s.t. $r(x^{t+1}) = r(x^t) \in \mathbb{C}^p$ を持つとする。 F の n 周期不変周期点代数多様体 (IVPP)[2][3][4] とは、 n 周期周期点代数多様体、

$$\left\{ x \in \mathbb{C}^d \mid F^{(n)}(x) - x = 0, F^{(m)}(x) - x \neq 0, m \leq n \right\} \quad (1)$$

であって、これが不変量のみからなるものをいう。

$$\left\{ x \in \mathbb{C}^d \mid \gamma^{(n)}(r(x)) = 0 \right\}, \quad \gamma^{(n)} \circ r : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^{d-p} \quad (2)$$

IVPP は IVPP 定理と呼ばれる以下の重要な性質を持つ [2][3][4]。

IVPP 定理 : d 次元有理写像 F が p 個不変量を持つとする。 $p \geq d/2$ を満たすとき、ある $n \geq 2$ に対して n 周期点代数多様体が *IVPP/離散周期点集合*^{*1} となれば、任意の $m \geq 2$ に対して m 周期点代数多様体は *離散周期点代数多様体/IVPP* とはならない。

* E-mail: t.yumibayashi@kiso.phys.se.tmu.ac.jp

*1 以降、連続点集合、或いは、離散点集合といったときは、不変量一定面 (レベルセット) $\{x \in \mathbb{C}^d \mid r(x) = h\}, h \in \mathbb{C}^p$ 上で考えているものとする。

IVPP 定理は写像の可積分性に対し重要な情報を持っている。即ち、非可積分系を特徴付ける Julia 集合 [6] は離散周期点集合 (の部分集合) によって特徴付けられるので、IVPP 定理より IVPP/Julia 集合の存在は Julia 集合/IVPP の存在とは相容れない。故に次の“予想”が導かれる。

予想：写像が *IVPP/Julia* 集合を持つとき写像は可積分/非可積分である。

即ち IVPP を研究することで“可積分性とは何か？”と云う大きな問いの答えに近づけると考えられる。以上が IVPP を研究する動機である。

IVPP が上記の様な興味深い性質を持つのは IVPP が“連続点集合”を成すからである。しかしながら、これまでの研究では、IVPP の“内訳”、即ちその“成分”は調べられてこなかった。本発表では IVPP の成分の構造について報告する。

1.2 再帰方程式 (RE)

次に、本発表の 2 つ目の主題である、再帰方程式について紹介する。

n 周期再帰方程式 (RE) とは、写像であって、任意の初期点について n 周期点となるものをいう [7][8]。以下の様な例が知られている [7]。

- 2 周期 RE :

$$X = \frac{1}{x}, \quad x, X \in \mathbb{C} \quad (3)$$

- 5 周期 RE :

$$X = \frac{1+x}{y}, \quad Y = x, \quad x, y, X, Y \in \mathbb{C} \quad (4)$$

n 周期 RE は空間に作用し、空間を n 個の“基本領域”に分解する。

特に、IVPP を持つ写像は、写像を n 周期 IVPP に制限する事で n 周期 RE となる [9]。即ち、IVPP の成分は、RE の基本領域として与えられると考えられる。

IVPP の成分 \sim RE の基本領域

この関係から IVPP の成分についての重要な性質が分かる。即ち、以下に見るケースにおいて、RE は円分多項式 [5] の構造を持ち、IVPP の成分はこの構造を反映しているのである。

加えて本発表では IVPP の成分を与えるアルゴリズムについても紹介する。

2 2次元 Möbius 写像

本発表では2次元 Möbius 写像を用いて議論を行う [10]。

2.1 写像

$$F_{2d} : (x, y) \mapsto (X, Y) := \left(x \frac{1-y}{1-x}, y \frac{1-x}{1-y} \right), \quad x, y \in \mathbb{C} \quad (5)$$

2.2 不変量

$$r := r(x, y) = xy \quad (6)$$

2.3 IVPP

(5) の IVPP の一般式は以下の様に与えられる [10]。

$$\gamma^{(n)}(r) = r + \tan^2 \left(\frac{\pi m}{n} \right), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad n = 3, 4, \dots \quad (7)$$

いくつか具体的に書くと以下の様になる。

$$\gamma^{(2)}(r) = \text{none}, \quad \gamma^{(3)}(r) = 3 + r, \quad \gamma^{(4)}(r) = 1 + r, \quad \text{etc...} \quad (8)$$

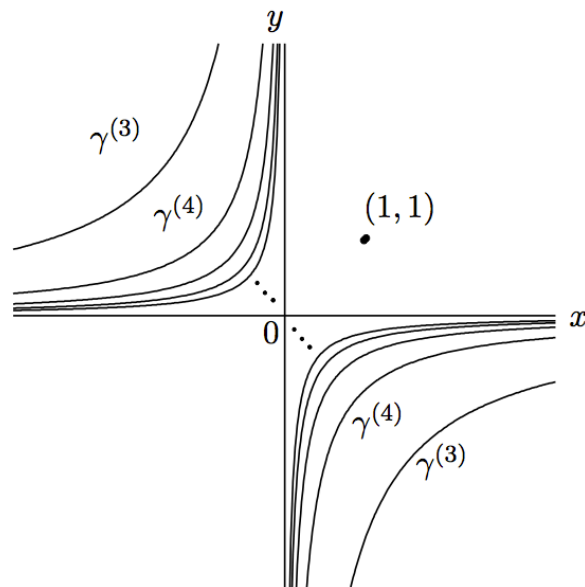


図1 2次元 Möbius 写像 (5) の IVPP

2.4 IVPP の成分

(5) の 3 周期 IVPP ($xy + 3 = 0$) 上の点の運動を x で径数付けたものは以下の様に与えられる。

$$\left(x, -\frac{3}{x}\right) \rightarrow \left(\frac{3+x}{1-x}, 3\frac{1-x}{3+x}\right) \rightarrow \left(\frac{x-3}{1+x}, 3\frac{1+x}{x-3}\right) \rightarrow \left(x, -\frac{3}{x}\right) \quad (9)$$

確かに全ての IVPP 上の点が 3 周期である事が分かる。

この IVPP の (x 方向の) 成分は列 (9) に $x = -\infty$ を代入する事で得る事が出来る。即ち、(5) の 3 周期 IVPP の (x 方向の) 成分 $(C_{3i})_x, i = 1, 2, 3$ は、以下の様に与えられる。

$$(C_{31})_x = (-\infty, -1), \quad (C_{32})_x = [-1, 1), \quad (C_{33})_x = [1, \infty) \quad (10)$$

$$C_{31} \xrightarrow{F} C_{32} \xrightarrow{F} C_{33} \xrightarrow{F} C_{31} \quad (11)$$

上で得た成分を使って (5) の 3 周期 IVPP を “タイリング” する事が出来る。それは以下の様に与えられる。

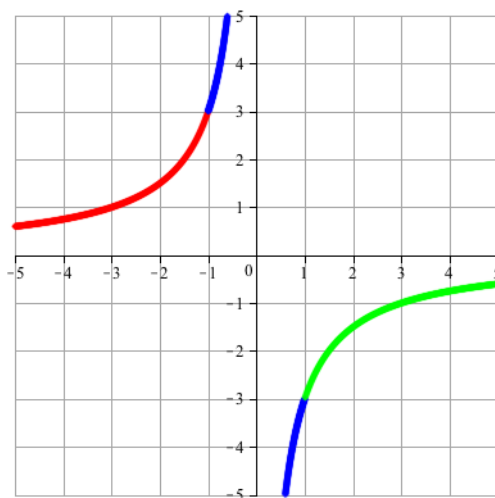


図 2 (5) の 3 周期 IVPP の成分, C_{31} : 赤, C_{32} : 青, C_{33} : 緑.

2.5 (5) の IVPP の成分の性質について

本節では (5) の IVPP の成分が持つ構造について議論する。まず、(5) をレベルセットに制限すると、以下の写像を得る。

$$x \mapsto X = \frac{x-r}{1-x}, \quad x, X \in \mathbb{C}$$

特に、この写像は以下の様な線型写像、即ち、Möbius 写像として書く事が出来る。

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \quad (12)$$

更に、 M を対角化する座標変換は、

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r} & \sqrt{r} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \quad (13)$$

であり、故に (12) は以下の様に対角化される。

$$\begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\pm} := 1 \pm \sqrt{r}, \quad \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \quad (14)$$

従って、新しい不変量、

$$s = \frac{\lambda_+}{\lambda_-}, \quad \lambda_{\pm} \in \mathbb{C} \quad (15)$$

を選ぶ事で、写像 (5) 或いは (14) はただのスケール変換となる。

$$z \mapsto Z = sz, \quad z, Z \in \mathbb{C} \quad (16)$$

この事実は (14) の (全ての) IVPP が円分多項式 [5] によって与えられる事を意味している。

$$\Phi_n(s) \sim s^n - 1 = 0 \quad (17)$$

結果、(5) 或いは (14) の n 周期 IVPP の成分は、 \mathbb{C}/\mathbb{Z}_n と等価である事が分かる。

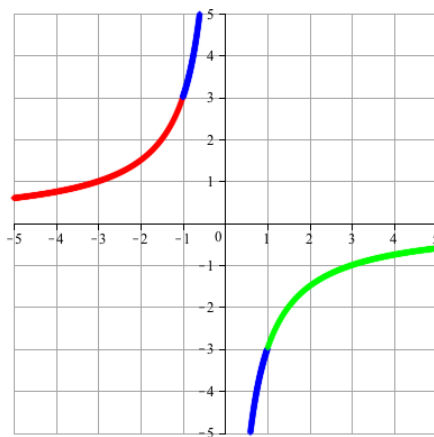


図3 3周期 IVPP

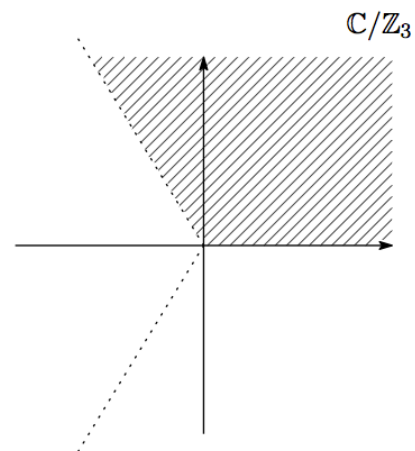


図4 $\mathbb{C}/3\mathbb{Z}$

以上の議論より、 n 周期 IVPP の各成分の x 方向の境界 c_m は、以下で与えられる。

$$c_m := \frac{(1 - s_n)(1 + s_n^m)}{(1 + s_n)(1 - s_n^m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (18)$$

ここで s_n は n 次円分多項式の解である。

更に、 z 変数における境界 d_m は、以下で与えられる。

$$d_m := -\sqrt{r} \frac{\sqrt{r}(\lambda_+^m + \lambda_-^m) + (\lambda_+^m - \lambda_-^m)}{\sqrt{r}(\lambda_+^m + \lambda_-^m) - (\lambda_+^m - \lambda_-^m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (19)$$

これらの公式は、以下の様に、写像 (14) を m 回繰り返した結果を、(12) へ引き戻す事で得る事が出来る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^m &= O \begin{pmatrix} \lambda_+^m & 0 \\ 0 & \lambda_-^m \end{pmatrix} O^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_+^m + \lambda_-^m & -\sqrt{r}(\lambda_+^m - \lambda_-^m) \\ -\frac{1}{\sqrt{r}}(\lambda_+^m - \lambda_-^m) & \lambda_+^m + \lambda_-^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで O は M の対角化行列とおいた。 x 方向の成分の境界は x に $-\infty$ を代入する事で得られる。これが (18) を得る方法である。

本節の最後に、IVPP の成分の境界について、もう 1 つの視点を紹介したい。我々は、IVPP の成分の境界を与える際、 x に $-\infty$ を代入した。これは“点 x が発散する様な初期点から出発した”と解釈する事も出来る。即ち、写像の x 成分の分母が 0 となる様な点の集まり (~ 特異点集合) と IVPP の交点が、IVPP の成分の境界となるのである。(5) の m 回写像の特異点集合は、以下の様に与えられる。

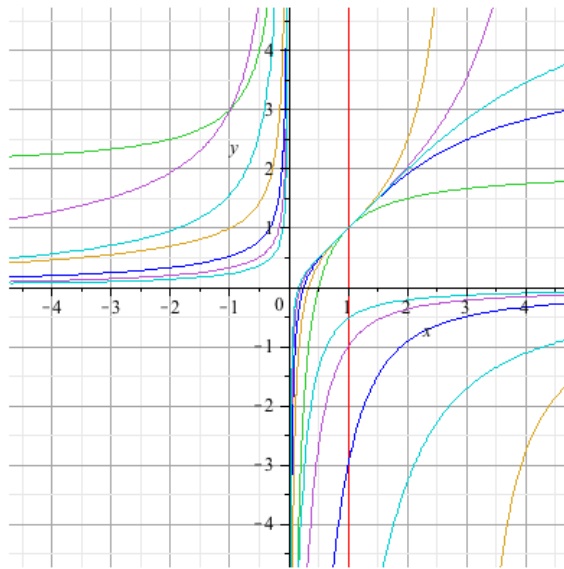


図 5 (5) の特異点集合, F : 赤, $F^{(2)}$: 緑, $F^{(3)}$: 黄色, $F^{(4)}$: 青, $F^{(5)}$: 紫, $F^{(6)}$: 水色

3 結論

以上の議論から任意の写像に対し以下の様な方法で IVPP の成分を導く事が出来る^{*2} : アルゴリズム

- 1 n 周期 IVPP の上に初期点 x^0 をとる。(もし IVPP が多価であるならば全ての部分に対し以下のアルゴリズムを実行する)
- 2 n 周期 IVPP の上の点の運動を計算する。

$$x^0 \rightarrow x^1(x^0) \rightarrow \cdots \rightarrow x^{n-1}(x^0) \rightarrow x^n(x^0) = x^0 \quad (20)$$

- 3 (20) に x^0 の定義域の中で最小のものを代入する。

以上の議論により、始めに述べた “IVPP の成分 \sim RE の基本領域” という関係は、より正確に

$$n \text{ 周期 IVPP} \sim \mathbb{C}/n\mathbb{Z}$$

と理解される事が分かった。

参考文献

- [1] T. Yumibayashi, arXiv:1504.07548, 2015(submitted).
- [2] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **76** No.2 p.024006, 2007.
- [3] S. Saito and N. Saitoh *J. Math. Phys*, **51** 063501, 2010.
- [4] S. Saito and N. Saitoh, “Invariant varieties of periodic points” in Mathematical Physics Research Developments, 2008 Nova Science Publishers, Inc., Capt.3 pp 85-139, 2008.
- [5] Wolfram Mathworld, mathworld.wolfram.com/CyclotomicPolynomial.html.
- [6] R. L. Devaney, “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems”, Westview Press, 2003.
- [7] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (Addison-Wesley), 1994.
- [8] R. Hirota and H. Yahagi, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **71**, 2867, 2002.
- [9] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 12775-12787, 2007.
- [10] S. Saito, N. Saitoh, H. Harada, T. Yumibayashi and Y. Wakimoto, AIP Advances, AIP ID: 003306ADV, 2013.

^{*2} 注意 : p 個不変量を持つ d 次元写像はレベルセットへ制限すると p 個パラメータを持つ。IVPP は $d - p$ 個の式からパラメータを制限するから、 $p - (d - p) = 2p - d$ 個、自由なパラメータが存在する事が分かる。2次元 Möbius 写像の場合、この値は 0 となる為、面倒なことは起こらないが、一般にはパラメータについても議論が必要となる。詳しくは [1] を参照の事。