ルート系のエルハルト多項式とその零点

山田 祐見（Yumi Yamada）
山形大学 地域教育文化学部 地域教育文化学科

1 導入

定義 1.1 (級数展開)

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Sigma(\Gamma, S; z)\\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} z^{l_S(\gamma)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(k) z^k\\ &\in \mathbb{Z}[[z]]\end{aligned}$$

ただし，$\sigma(k)$ は $\{\gamma \in \Gamma | l_S(\gamma) = k\}$ を満たす元の数を表す.

定義 1.2 (基本的な 4 つのルート格子 A_n，B_n，C_n，D_n)

$$\begin{aligned}A_n &= \left\{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\right\}\\ &\quad \supset R(A_n) = \left\{\pm(e_i - e_j) \;\middle|\; 1 \le i < j \le n+1\right\}\\ B_n &= \mathbb{Z}^n\\ &\quad \supset R(B_n) = \left\{\pm e_i \;\middle|\; 1 \le i \le n\right\} \quad \cup \quad R(D_n)\\ C_n &= \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 2)\right\}\\ &\quad \supset R(C_n) = \left\{\pm 2e_i \;\middle|\; 1 \le i \le n\right\} \quad \cup \quad R(D_n)\\ D_n &= \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 2)\right\}\\ &\quad \supset R(D_n) = \left\{\pm e_i \pm e_j \;\middle|\; 1 \le i < j \le n\right\}\end{aligned}$$

定理 1.1 (上記の組 (Γ, R) の級数展開)

$$\Sigma(A_n, R; z) = (1-z)^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 z^i$$
$$\Sigma(B_n, R; z) = (1-z)^{-n} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} z^i - 2nz(1+z)^{n-1} \right)$$
$$\Sigma(C_n, R; z) = (1-z)^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} z^i$$
$$\Sigma(D_n, R; z) = (1-z)^{-n} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} z^i - 2nz(1+z)^{n-2} \right)$$

2 エルハルト多項式

K を有限次元の実ベクトル空間 V の格子 Γ における凸多面体とする．K^o を K の内部の格子点の数，∂K を K の境界の点の数とすると，$k \geq 1$ に対して，

$$kK \cap \Gamma \text{の元の数を } E_K(k)$$
$$k\overset{o}{K} \cap \Gamma \text{の元の数を } E_{\overset{o}{K}(k)}$$
$$\partial(kK) \cap \Gamma \text{の元の数を } E_{\overset{\partial}{K}(k)}$$

と表し，これを用いてエルハルト級数を以下のように定義する．

定義 2.1 (エルハルト級数)

$$\varepsilon_K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} E_K(k) z^k = \frac{P_K(z)}{(1-z)^{d+1}}$$
$$\varepsilon_{\overset{o}{K}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{\overset{o}{K}}(k) z^k = \frac{P_{\overset{o}{K}}(z)}{(1-z)^{d+1}}$$
$$\varepsilon_{\overset{\partial}{K}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{\overset{\partial}{K}}(k) z^k = \varepsilon_K(z) - \varepsilon_{\overset{o}{K}}(z)$$

次に，K が上記のような次元 d の整凸多面体としたときの特徴をまとめる．

定理 2.1 (エルハルト)
(i)$E_K(k)$ は次数が d である k に関する多項式であり，$E_K(0)=1$

(ii)$k\geq 1$ に対して，

$$E_K(-k)=(-1)^d E_{\overset{\circ}{K}}(k)$$

(iii) 同様に，$k\geq 1$ に対して，

$$E_{K^\partial}(-k)=(-1)^{d+1} E_{\overset{\partial}{K}}(k)$$

(iv)K がラミネーターならば，$P_K\left(\frac{1}{z}\right)=z^d P_K(z)$

(v) 多項式 $E_K(k)$ の主係数は $Vol_{ret}(K)$

(vi) 多項式 $E_K(k)$ の k^{d-1} の係数の 2 倍は $Vol_{ret}(\partial K)$

ただし，$Vol(K)=\sqrt{disk(\Gamma)}Vol_{ret}(K)$.

級数展開とエルハルト級数の間には

$$\frac{\Sigma(\gamma,R;z)}{1-z}=\varepsilon_K(z)$$

という関係があり，それぞれの部分集合 R を凸に包むことによって現れる整凸多面体に関するエルハルト多項式を以下のように導くことができる.

定理 2.2 (エルハルト多項式)

$$A_n\text{の場合}: E_K(k)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\binom{k-i+n}{n}$$

$$B_n\text{の場合}: E_K(k)=\binom{k+n}{n}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\binom{2n+1}{2i}-2n\binom{n-1}{i-1}\right\}\binom{k-i+n}{n}$$

$$C_n\text{の場合}: E_K(k)=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}\binom{k-i+n}{n}$$

$$D_n\text{の場合}: E_K(k)=\binom{k+n}{n}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\binom{2n}{2i}-2n\binom{n-2}{i-1}\right\}\binom{k-i+n}{n}$$

また，4 つのルート格子 A_n，B_n，C_n，D_n における $Vol(K)$ と $Vol_{ret}(\partial K)$ は以下のように定まる.

命題 2.1 $(Vol(K), Vol_{ret}(K))$

$$
\begin{aligned}
A_n\text{の場合}: Vol(K) &= \frac{\sqrt{n+1}(2n)!}{(n!)^3} = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}\binom{2n}{n} \\
Vol_{ret}(\partial K) &= \frac{1}{(n-1)!}\binom{2n}{n} \\
B_n\text{の場合}: Vol(K) &= \frac{2^n(2^n-n)}{n!} \\
Vol_{ret}(\partial K) &= \frac{2^{2n-1}}{(n-1)!} \\
C_n\text{の場合}: Vol(K) &= \frac{4^n}{n!} \\
Vol_{ret}(\partial K) &= \frac{2^{2n-1}}{(n-1)!} \\
D_n\text{の場合}: Vol(K) &= \frac{2^n(2^n-n)}{n!} \\
Vol_{ret}(\partial K) &= \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}(2^n-n)
\end{aligned}
$$

特に，A_n，C_n，D_n のとき

$$
\frac{Vol_{ret}(\partial K)}{Vol_{ret}(K)} = n
$$

同様に B_n に対して，

$$
\begin{aligned}
\frac{Vol_{ret}(\partial K(B_n))}{Vol_{ret}(K(B_n))} &< n (n \geq 3) \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{Vol_{ret}(\partial K(B_n))}{Vol_{ret}(K(B_n))} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である．

3 様々な特性

上記の 4 つのルート系のエルハルト多項式に関して，もし何かしらの特徴があるのならば，n 次元におけるエルハルト多項式が予測できるのではないかと考え，実際に上記の 4 つのルート系の級数展開，エルハルト級数，そしてエルハルト多項式をプログラムを使って展開してみた．すると，いくつかの特性を見つけることができた．

定理 3.1
A_n, C_n 型ルート系において，それぞれの R を凸に包んだものを K としたとき，そのエルハルト多項式の根の実部はすべて $-\frac{1}{2}$ になる．

定理 3.2
4 つのルート系に対してエルハルト級数と級数展開の各係数を素数で割っていくと，分数と整数の並びに法則性がある．

4 結語

最後に，今回は 4 つの基本的なルート格子 A_n，B_n，C_n，D_n に関する研究が主だったが，他にも様々な特徴や法則性があるようだ．それを見つけると共に，$\mathbb{Z}^n$ のエルハルト多項式についての研究を進めていきたいと考えている．

参考文献

[1] 枡田幹也 福川由貴子 著，格子からみえる数学，日本評論社

[2] Paul R.Scott，The Fracination of the Elementary，‘Hannah Neumann Memorial Lecture’ presented at ICME 5 in Adelaide,South Australia,in August,1984

[3] 日比孝之，可換変数と組合せ論，シュプリンガー・フェアラーク東京

[4] R.Bacher, P.De La Harpe & B.Venkov，Sries de Croissance et Polynomes D'Ehrhart Associs aux Rseaux de Racines，Ann.Inst.Fourier,Grenoble49,3(1999)