Zero-point of continuous closed 1-form and Lusternik-Schnirelman type Category

渡邊 一義 Kazuyoshi Watanabe (東北大学理学研究科数学専攻)*

1 Introduction

closed 1-form は Novikov 理論などいろいろな側面から研究されており, 現在では Symplectic 幾何など数学の様々な分野で応用されている. 2002 年には M.Farber により closed 1-form に対する Lusternik-Schnirelmann 型理論が研究された. Lusternik-Schnirelmann category とは位相空間に対して何枚の可縮な open set で被覆できるかという量である. 古典的な Lusternik-Schnirelmann 理論は多様体の category がなめらかな関数の特異点の個数の下界になっているが, 1-form にたいする Lusternik-Schnirelmann 理論は 1-form の零点の個数だけでなく, ホモクリニックサイクルという多様体上の力学系に関する情報も与える. コホモロジークラスに関係する category を定義するために Farber は位相空間上の closed 1-form を定義した. これを連続的な closed 1-form と呼ぶことにする. このレポートでは連続的な closed 1-form 及びコホモロジークラスに関係した Lusternik-Schnierelmann Category に関する要約を述べ, 多様体に限らず CW-complex 上で連続的な closed 1-form の零点を適切に定めることで前述の Lusternik-Schnirelmann category に関する定理が成立することを紹介する.

2 Continuous closed 1-form

X を CW-complex と仮定する. まず closed 1-form を一般化した, "連続的な closed 1-form"について述べる.

Definition 1. X 上の連続的な *closed 1-form* ω とは $\mathcal{U} = \{U\}$ を X の開被覆として連続実関数 $f_U : U \to \mathbf{R}$ の組 $\{f_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ で次を満たすものと定義する: 任意の組 $U, V \in \mathcal{U}$ に対して,

$$f_U|_{U\cap V} - f_V|_{U\cap V} : U \cap V \to \mathbf{R} \tag{1}$$

が局所定数間数になっている

2 つの 1-forms$\{f_U\}_{U\in\mathcal{U}}$, $\{g_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ が 1-form として一致するとは $\{f_U, g_V\}_{U\in\mathcal{U},V\in\mathcal{V}}$ が再び X 上の連続的な closed 1-form になっていると定義する. 任意の X 上の連続関数 $f : X \to \mathbf{R}$ は開被覆として $\mathcal{U} = \{X\}$ をとって closed 1-form としてあらわされる. それを d f とあらわす.

$\omega = \{f_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ を連続的な closed 1-form として, $\gamma : [0, 1] \to X$ を X 上の連続的な道とする. $[0, 1]$ の細分 $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_N = 1$ を, 任意の i に対して $\gamma[t_i, t_{i+1}]$ が一つの開集合 $U_i \in \mathcal{U}$ に含まれるようにとる. こ

* email:kazuyoshi.watanabe.q5@dc.tohoku.ac.jp

のとき, 道 γ に沿った連続的な closed 1-formω の積分を次のように定める.

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{N-1} [f_{U_i}(\gamma(t_{i+1})) - f_{U_i}(\gamma(t_i))] \tag{2}$$

この積分は細分や開被覆の取り方に依らない.

Lemma 1. *X 上の始点と終点が同じ道 γ, γ' に対して, 両者が境界について, ホモトピックであるなら, 連続的な closed 1-form のそれぞれの道に沿った積分の値は一致する*

3 Category with respect to a cohomology class

Lusternik-Schnirelmann category はいかに位相空間が複雑かを示す量であった. 以下の定義はその category を 1-form のあらわす方向にどれだけ複雑かを示す量として拡張したものである.

Definition 2. *X を有限型の CW-complex として, $\xi \in H^1(X;\mathbf{R})$ をコホモロジークラスとする. $\mathrm{cat}(X,\xi)$ を任意の自然数 $N > 0$ に対してつぎを満たす開被覆が存在するような最小の整数 k とする.*

$$X = F \cup F_1 \cup \cdots \cup F_k, \tag{3}$$

(a)$j = 1, ..., k$ に対し, 包含写像 $F_j \to X$ はそれぞれ null-homotopic.
(b) あるホモトピー $h_t : F \to X$ $(t \in [0,1])$ があって次を満たす:
h_0 は包含写像 $F \to X$ であり, 任意の F 上の点 $x \in F$ に対して $\int_{\gamma_x} \omega \le -N$ が成り立つ. ここで ω は ξ をあらわす連続的な closed 1-form として, また $\gamma_x(t) = h_t(x)$ である.

Remark
古典的な Lusternik-Schnirelmann category との比較をする. 一般には次が成立する.

$$\mathrm{cat}(X,\xi) \le \mathrm{cat}(X) \tag{4}$$

ここで $\mathrm{cat}(X)$ は Lusternik-Schnirelmann category をあらわす.
また, コホモロジーが 0 の時, 両者は一致する.

$$\mathrm{cat}(X,0) = \mathrm{cat}(X) \tag{5}$$

4 The Estimate of the number of zeros

ここでは, 連続的な closed 1-form の零点を定める. 1-form の定める力学系を利用して, 零点を定めたい.

Definition 3. *$\omega = \{f_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ を X 上の連続的な closed 1-form とする. ω の勾配的な流れとは, X 上の連続的な流れ φ^t で $U - (\mathrm{Fix}(\varphi^t) \cap U)$ 上, f_U は流れに沿って狭義単調減少になっていることである.*
また, ω の任意の勾配的な流れに対して, 点 $p \in X$ が固定点になっているとき, 点 p は ω の零点である, という.

古典的な Lusternik-Schnirelman category の理論では category が滑らかな関数の臨界点の下界になっていた．1-form に関する場合, 力学系が特殊な状況であれば, 零点の下界になっていることがわかる．まず固定点と category の関係を述べる．

Theorem 1. *X を有限型の CW-complex とし, ω を X 上の $\xi \in H^1(X;\mathbf{R})$ をあらわす連続的な closed 1-form とする．φ を ω の勾配的な流れとして固定点が $0 < k < \infty$ 個あるとする．このとき $k \leq \mathrm{cat}(X,\xi)$ ならば, φ はホモクリニックサイクルを持つ.*

ホモクリニックサイクルとは流れの軌跡の列 $\gamma_1(t), \gamma_2, ..., \gamma_n(t)$ があって $i = 1, ..., n-1$ に対して次の式が成り立つもののことである．

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_i(t) = p_{i+1} = \lim_{t\to-\infty} \gamma_{i+1}(t), \lim_{t\to+\infty} \gamma_n(t) = p_1 = \lim_{t\to-\infty} \gamma_1(t). \tag{6}$$

零点の定義より, 次がわかる．

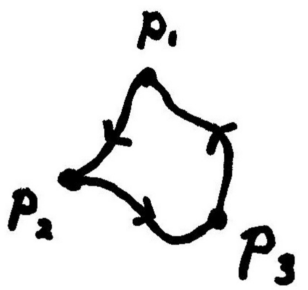

図 1　Homoclinic cycle

Corollary 1. *X を有限型の CW-complex とし, ω を X 上の $\xi \in H^1(X;\mathbf{R})$ をあらわす連続的な closed 1-form とする.*

(1) ω が有限個の零点 $p_1, .., p_k$ をもつとする．もし $k < \mathrm{cat}(X,\xi)$ ならば, $p_1, .., p_k$ を固定点とするような ω の勾配的な流れはホモクリニックサイクルを持つ.

(2)ω がホモクリニックサイクルを持たないような勾配的な流れをもつとすると, ω は少なくとも $\mathrm{cat}(X,\xi)$ 個の零点を持つ.

5 Examples

連続的な closed 1-form と category の計算例を挙げる．

種数 2 の閉曲面 T_1 とそれの穴を一つつぶしたようなもの T_2 を考え, 図のように穴に対して回るように 1-form をとる．すると, T_1 の方は滑らかな多様体となり, 1-form は滑らかなものとしてとれる．一方 T_2 に対しては, 多様体ではなく, 1-form は連続的な closed 1-form としてあらわすことができる．つまり, Farber 氏の方法では $d\theta_1$ を測ることができても, $d\theta_2$ をみることはできない．だが, ここで述べた方法により, $d\theta_2$ の零点も定義されることができ, 個数も測ることができる．

ここで T_1 上で, $d\theta_1$ の零点の個数は 2 個であり, $\mathrm{cat}(T_1, [d\theta_1]) = 1$ である．

また, T_2 上で, $d\theta_2$ の零点の個数は 1 個であり, $\mathrm{cat}(T_2, [d\theta_2]) = 1$ である．

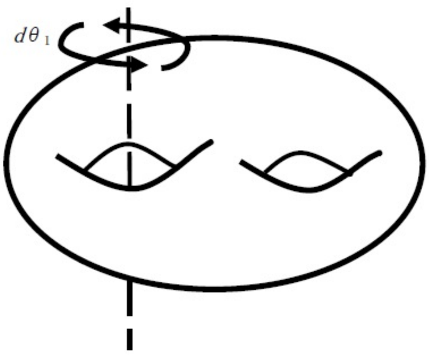

図 2　T_1

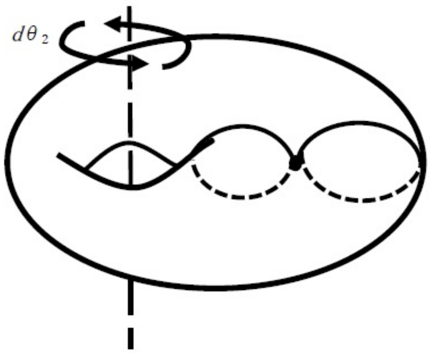

図 3　T_2

参考文献

[1] M.Farber, "Topology of closed one forms", Msth. Surveys Monogr., vol108, Amer. Math. Soc., Providence, RI 2004.

[2] M.Farber,"Lusternik-Schnirelman theory and dynamics",(South Hadley,MA,2001),Contemp.Math.,vol.316,Amer.Math.Soc.,Providence,RI 2002,pp.95-111.

[3] M.Farber, T.Kappeler, J.Latschev, and E.Zehnder, "Lyapunouv 1-forms for flows", *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24**:5 (2004), 1451-1475.

[4] O.Cornea, G.Lupton, J. Oprea, and D.Tanré, "Lusternik-Schnirelmann category", Math. Surveys Monogr., vol. 103, Amer. Math Soc., 2003