非線型波動方程式に対する初期値問題の解析

若狭 恭平 (Kyouhei Wakasa)

北海道大学大学院理学研究院数学部門, 日本学術振興会特別研究員 PD
e-mail： wakasa@math.sci.hokudai.ac.jp

1　序論

次の非線型波動方程式に対する初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u = |u|^p, \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x),\ \partial_t u(x,0) = g(x),\ \text{for } x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $n \geq 1$ は空間次元, $u = u(x,t)$ は未知関数, $f, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $p > 1$ である.

この初期値問題について, 小さい初期値 (f,g) を与えた場合の時間大域解の存在と非存在に関する研究は, 空間 3 次元における John [10] の結果を始まりとする．それは, $p > 1+\sqrt{2}$ (優臨界) ならば, 十分小さい (f,g) に対して (1) の解は時間大域的に存在し, $1 < p < 1+\sqrt{2}$ (劣臨界) ならば, (1) の解は時間大域的には存在しないというものである．$p = 1+\sqrt{2}$ (臨界) のときは, Schaeffer [22] により解が時間大域的に存在しないことが示されている．John の研究以降, 他の空間次元において (1) の方程式を解析する取り組みが様々な研究者によって行われた．その中で Strauss [25] は次の予想を立てた. それは,「$n \geq 2$, $p_0(n)$ を 2 次方程式 $(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$ の正根とするとき, $p > p_0(n)$ ならば十分小さい初期値に対して解は時間大域的に存在し, 他方, $1 < p \leq p_0(n)$ ならば解は時間大域的には存在しない.」というものである．この予想は, 空間 2 次元において, Glassey [7], [8], 空間 4 次元以上の高次元空間では, Sideris [23], Rammaha [21], Georgiev & Lindblad & Sogge [5], Yordanov & Zhang [29], Zhou [34] らによって解決された．現在ではこの予想はほぼ解決されている．空間 1 次元の場合は, Kato [11] によってすべての $p > 1$ に対して時間大域解が存在しないことが示されている．Strauss による予想を解決する研究と並行して, (1) の解の最大存在時間 (Lifespan) の評価を得る研究も行われた．詳しくは, Lindblad [18], Zhou [31], [32], [33], Lindblad & Sogge [20], Takamura & Wakasa [27], Takamura [26] らを参照のこと.

1990 年代後半から 2000 年代前半にかけて, 次のような相互作用効果を考慮した非線型波動方程式系 (p-q 系) の機構を理解する取り組みが様々な研究者によって行われた.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u = |v|^p, \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^n \times [0,\infty), \\ \partial_t^2 v - \Delta_x v = |u|^q, \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^n \times [0,\infty), \end{cases} \tag{2}$$

ここで, $p, q > 1$ とする．Del Santo & Georgiev & Mitidieri [3] は, (2) の時間大域解の存在と非存在が次の曲線で決定されることを示した．すなわち,

$$F(p,q,n) = \max\left\{\frac{q+2+p^{-1}}{pq-1},\ \frac{p+2+q^{-1}}{pq-1}\right\} - \frac{n-1}{2},$$

とおくと, $F(p,q,n)<0$ ならば, 十分小さい初期値に対して (2) の解は時間大域的に存在し, $F(p,q,n)>0$ ならば, 解は時間大域的には存在しないというものである. その後, $F(p,q,n)=0$ の場合は, 空間 3 次元において, Del Santo & E.Mitidieri [4], 高次元空間において, Kurokawa & Takamura & Wakasa [15] が (2) の解が時間大域的に存在しないことを示した. 更に, 単独方程式の場合と同様に, 解の最大存在時間の最適な評価を得る研究が, Kubo & Ohta [12], Agemi & Kurokawa & Takamura [1], Kurokawa & Takamura [14], Georgiev & Takamura & Zhou [6], Kurokawa & Takamura & Wakasa [15] らによって行われた.

近年の研究動向としては, 外部初期値境界値問題や, 平坦ではない計量をもつ空間での Strauss 予想の解決を行う研究が活発に行われている. 特に, 後者の研究についてはブラックホールの理論に現れる, シュヴァルツシルト時空やカー時空等が考えられている. これらの研究については, 講演中に詳細を述べることとする. 外部問題に関しては, 例えば, Hidano & Metcalfe & Smith & Sogge & Zhou [9], Zhou & Han [35], Li & Wang [17], Zha & Zhou [30], Lai & Y.Zhou [16] を参照のこと. また, シュヴァルツシルト時空やカー時空 における解析については, Catania & Georgiev [2], Lindblad & Metcalfe & Sogge & Tohaneanu & Wang [19] を参考文献として挙げておく.

2 主結果

ここでは, 講演者による結果 [28] を紹介することとする. 次の重みつき非線型項をもつ波動方程式に対する初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u-\partial_x^2 u=\dfrac{|u|^{p-1}u}{(1+x^2)^{(1+a)/2}} & \text{in } \mathbf{R}\times[0,\infty), \\ u(x,0)=\varepsilon f(x),\ \partial_t u(x,0)=\varepsilon g(x), & x\in\mathbf{R}, \end{cases} \tag{3}$$

ここで, $(f,g)\in C^2(\mathbf{R})\times C^1(\mathbf{R})$, $\varepsilon>0$ は十分小さいパラメータ, $a\geq -1$, $p>1$ とする. (3) の方程式は, シュヴァルツシルト時空における (1) のトイモデルとして考えられる. $a=-1$ のときは, 前で述べたように [11] により, すべての $p>1$ に対して解が時間大域的に存在しないことがわかっている. Kubo & Osaka & Yazici [13] は, $p>1$, $pa>1$ で, 初期値が奇関数かつ ε が十分小さければ, (3) の解は時間大域的に存在し, $p>1$, $a\geq -1$ で, $f\equiv 0$, $g(x)\geq 0$ $(\forall x\in\mathbf{R})$, $\int_{\delta/2}^{\delta} g(y)dy>0$ $(0<\delta<1)$ をみたす初期値に対しては, (3) の解が時間大域的には存在しないことを示した. 特に, (3) の解の最大存在時間を T_ε と表せば, $T_\varepsilon\leq C\varepsilon^{-p^2}$ となることも示した. ここで, $C>0$ は ε に依らない定数である. しかしながら, この評価は少なくとも $a=-1$ のときには最適ではないことが分かっている. 実際, $a=-1$ のときは, 最大存在時間が $T_\varepsilon\leq C\varepsilon^{-(p-1)/2}$ if $\int_{\mathbf{R}} g(x)dx\neq 0$ で評価されることが Zhou [31] によって明らかにされているからである. 従って, 我々の目的は Zhou [31] の結果を $a\geq -1$ のときに拡張することが目的となる. 我々は以下の結果を得た.

Theorem 1 (K.Wakasa [28]) *$a\geq -1$, $p>1$ とする. $f\equiv 0$ で, $g\in C^1(\mathbf{R})$ は, $g(x)\geq 0(\not\equiv 0)$ $\forall x\in\mathbf{R}$, $\int_{-1}^{1} g(y)dy>0$. をみたすとする. このときある正定数 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(g,a,p)$, $C=C(g,a,p)$ が存在して, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ に対して*

$$T_\varepsilon\leq\begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)/(1-a)} & \text{if } -1\leq a<0, \\ \phi^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{if } a=0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)} & \text{if } a>0, \end{cases} \tag{4}$$

が成立する. ここで, $\phi(s) = s\log(2+s)$ *for* $s \geq 0$ である.

Theorem 2 (K.Wakasa[28]) $a \geq -1$, $p > 1$ とする. $f \in C^2(\mathbf{R})$, $g \in C^1(\mathbf{R})$ は, $\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R})} < \infty$, $\|g\|_{L^1(\mathbf{R})} < \infty$ をみたすとする. このとき, ある正定数 $c = c(f,g,a,p)$ が存在して,

$$T_\varepsilon \geq \begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/(1-a)} & \textit{if } -1 \leq a < 0, \\ \phi^{-1}(c\varepsilon^{-(p-1)}) & \textit{if } a = 0, \\ c\varepsilon^{-(p-1)} & \textit{if } a > 0, \end{cases} \tag{5}$$

が成立する.

証明の中で鍵となる事実は, 逐次近似法の第 1 段階の評価式が, 1 次元波動方程式の解の表現公式の特性を基に改良できたことにある. また, 初期値が奇関数である場合も解の最大存在時間の評価を得ることができる. このことについては, 講演中に詳細を述べることとする.

References

[1] R.Agemi, Y.Kurokawa and H.Takamura, *Critical curve for p-q systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, J. Differential Equations, **167**(2000), 87-133.

[2] D.Catania and V.Georgiev, *Blow-up for the semilinear wave equation in the Schwarzschild metric*, Differential Integral Equations **19** (2006), no. 7, 799-830.

[3] D.Del Santo, V.Georgiev and E.Mitidieri, *Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems,* in "Geometric Optics and Related Topics" (F.Colombini and N.Lerner Eds.), Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **32**, pp.117-140, Birkhäuser Boston, 1997.

[4] D.Del Santo and E.Mitidieri, *Blow-up of solutions of a hyperbolic system: the critical case,* Differential Equations, **34**, (1998), 1157-1163.

[5] V.Georgiev, H.Lindblad and C.D.Sogge, *Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **119**(1997), 1291-1319.

[6] V.Georgiev, H.Takamura and Y.Zhou, *The lifespan of solutions to nonlinear systems of a high-dimensional wave equation*, Nonlinear Anal., **64**(2006), 2215-2250.

[7] R.Glassey, *Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations*, Math. Z., **177**(1981), 323-340.

[8] R.Glassey, *Existence in the large for* $\Box u = f(u)$ *in two space dimensions*, Math. Z, **178**(1981), 233-261.

[9] K. Hidano, J. Metcalfe, H.F. Smith, C.D. Sogge and Y. Zhou, *On abstract Strichartz estimates and the Strauss conjecture for nontrapping obstacles*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (5) (2010) 2789-2809.

[10] F.John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math., **28**(1979), 235-268.

[11] T.Kato, *Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math, **33**(1980), 501-505.

[12] H.Kubo and M.Ohta, *Critical blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions,* J. Math. Anal. Appl., **240**, (1999), 340-360.

[13] H.Kubo, A,Osaka and M.Yazici, *Global existence and blow-up for wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension*, Interdisciplinary Information Sciences, **19**(2013), 143-148.

[14] Y.Kurokawa and H.Takamura, *A weighted pointwise estimate for two dimensional wave equations its applications to nonlinear systems*, Tsukuba J. Math. **27** (2003), 417-448.

[15] Y.Kurokawa, H.Takamura and K.Wakasa, *The blow-up and lifespan of solutions to systems of semilinear wave equation with critical exponents in high dimensions*, Differential and Integral Equations, Khayyam Publishing, Inc., 25, no.3-4, (2012), 363-382.

[16] N.A.Lai and Y.Zhou, *Finite time blow up to critical semilinear wave equation outside the ball in 3-D*, Nonlinear Analysis **125** (2015) 550-560.

[17] X. Li and G. Wang, *Blow up of solutions to nonlinear wave equations in 2D exterior domains*, Arch. Math. **98** (2012) 265-275.

[18] H.Lindblad, *Blow-up for solutions of* $\Box u = |u|^p$ *with small initial data*, Comm. Partial Differential Equations, **15(6)**(1990), 757-821.

[19] H.Lindblad, J.Metcalfe, C.D.Sogge, M.Tohaneanu and C.Wang, *The Strauss conjecture on Kerr black hole backgrounds*, Math. Ann. **359** (2014), no. 3-4, 637-661.

[20] H.Lindblad and C.D.Sogge, *Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **118**(1996), 1047-1135.

[21] M.A.Rammaha, *Finite-time blow-up for nonlinear wave equations in high dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **12**(1987), 677-700.

[22] J.Schaeffer, *The equation* $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ *for the critical value of* p, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **101A**(1985), 31-44.

[23] T.C.Sideris, *Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations, **52**(1984), 378-406.

[24] H.F. Smith, C.D. Sogge and C. Wang, *Strichartz estimates for Dirichlet-wave equations in two dimensions with applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012) 3329-3347.

[25] W.A.Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal., **41**(1981), 110-133.

[26] H.Takamura, *Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations*, Nonlinear Analysis TMA, **125** (2015), 227-240.

[27] H.Takamura and K.Wakasa, *The sharp upper bound of the lifespan of solutions to critical semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations, **251**, no.4-5, (2011) 1157-1171.

[28] K.Wakasa, *The lifespan of solutions to wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension* , to appear in Hokkaido Mathematical Journal.

[29] B.Yordanov and Q.S.Zhang, *Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions*, J. Funct. Anal., **231**(2006), 361-374.

[30] D.Zha and Y.Zhou, *Lifespan of classical solutions to quasilinear wave equations outside of a star-shaped obstacle in four space dimensions*, J. Math. Pures Appl. **103** (3) (2015) 788-808.

[31] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to* $u_{tt}-u_{xx}=|u|^{1+\alpha}$, Chin. Ann. Math. Ser.B, **13**(1992), 230-243.

[32] Y.Zhou, *Blow up of classical solutions to* $\Box u=|u|^{1+\alpha}$ *in three space dimensions*, J. Partial Differential Equations, **5**(1992), 21-32.

[33] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to* $\Box u=|u|^p$ *in two space dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **14**(1993), 225-236.

[34] Y.Zhou, *Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **28**(2007), 205-212.

[35] Y.Zhou and W.Han, *Blow-up of solutions to semilinear wave equations with variable coefficients and boundary*, J. Math. Anal. Appl. **374** (2011) 585-601.