ψ グラフ配置の自由性の頂点重み付きグラフの性質による特徴づけ

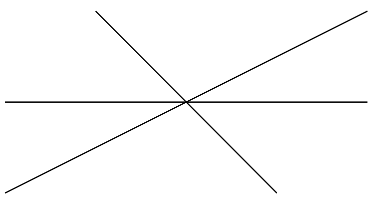
辻栄　周平 [*]（Shuhei TSUJIE）
北海道大学大学院理学研究院数学部門

概要

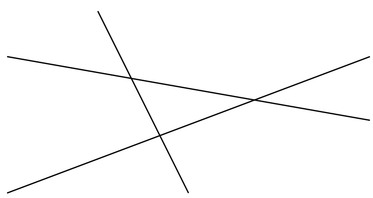
ベクトル空間の有限個の超平面の集まりを超平面配置という．Stanley はある種の頂点重み付きグラフ (G, ψ) に対して超平面配置 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ を導入し，超可解性を特徴づけ，自由性と同値であると予想した．本講演では $\mathcal{A}_{G,\psi}$ の自由性の特徴づけについて説明する．本研究は北海道大学の陶山大輔との共同研究である．

1　超平面配置

超平面配置（**hyperplane arrangement**）とは，ℓ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^\ell$ の超平面の有限個の集まりのことである．本稿では，超平面配置はすべて中心的（**central**）なもの，つまり原点を通る超平面（余次元 1 の部分空間）の有限個の集まりのみを考える．



中心的超平面配置



中心的でない超平面配置

$\{x_1, \dots, x_\ell\}$ を $(\mathbb{R}^\ell)^*$ の基底とし，$S = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_\ell]$ とする．S は $\mathbb{R}^\ell$ 上の多項式関数全体からなる環である．$\mathrm{Der}(S)$ で $\mathbb{R}^\ell$ 上の多項式ベクトル場全体のなす S 加群を表す．

$$\mathrm{Der}(S) = \left\{ \theta \colon S \to S \colon \mathbb{R}\text{線形} \mid \theta(fg) = f\theta(g) + \theta(f)g \ (\forall f, g \in S) \right\}.$$

[*] E-mail: tsujie@math.sci.hokudai.ac.jp

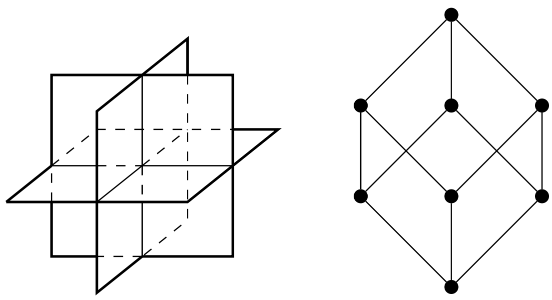
原点を通る超平面 H はある斉次 1 次式 $\alpha_H \in E^*$ の零点集合である．α_H は定数倍を除いて一意的に定まる．超平面配置 $\mathcal{A}$ に対し，対数的ベクトル場全体からなる S 加群（logarithmic derivation module）$D(\mathcal{A})$ を以下で定める．

$$D(\mathcal{A}) \coloneqq \{\theta \in \mathrm{Der}(S) \mid \theta(\alpha_H) \in \alpha_H S \ (\forall H \in \mathcal{A})\}.$$

これは，$\mathcal{A}$ に属する各超平面に沿った多項式ベクトル場全体のなす加群である．$D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群であるとき，$\mathcal{A}$ は自由（**free**）であるという．$\mathcal{A}$ が自由であれば，$D(\mathcal{A})$ は斉次元からなる基底 $(\theta_1, \ldots, \theta_\ell)$ をもつ．$(\deg\theta_1, \ldots, \deg\theta_\ell)$ を $\mathcal{A}$ の指数（**exponents**）という．

超平面配置 $\mathcal{A}$ に属するいくつかの超平面の交わり全体のなす集合は束をなす．これを $\mathcal{A}$ の交叉束（**intersection lattice**）といい，$L(\mathcal{A})$ で表す．

$$L(\mathcal{A}) \coloneqq \left\{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \;\middle|\; \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\}, \quad X \leq Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} X \supseteq Y.$$



超平面配置とその交叉束の例

交叉束 $L(\mathcal{A})$ の最大元 $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$ の余次元を $\mathcal{A}$ の階数（**rank**）といい，$\operatorname{rank}\mathcal{A}$ で表す．超平面配置 $\mathcal{A}$ が超可解（**supersolvable**）であるとは，交叉束 $L(\mathcal{A})$ が超可解であるときにいう．超可解束の定義はここでは述べないが，超平面配置の超可解性については以下の特徴づけがある．

Theorem 1.1 (Björner-Edelman-Ziegler [1, Theorem 4.3])**.** 超平面配置 $\mathcal{A}$ が超可解であることと，部分配置の列

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_r \supseteq \mathcal{A}_{\ell-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{A}_1$$

が存在して，以下の条件を満たすことは同値である．

(1) $\operatorname{rank}\mathcal{A}_i = i \quad (1 \leq i \leq r)$.
(2) 任意の $H, H' \in \mathcal{A}_i$ $(H \neq H')$ に対して，$H'' \in \mathcal{A}_{i-1}$ が存在して，$H \cap H' \subseteq H''$.

さらに，一般に以下の定理が成り立つ．

Theorem 1.2 (Jambu-Terao [4, Theorem 4.2])．超平面配置 $\mathcal{A}$ が超可解であれば自由である．

この定理の逆は一般には成立しない．すなわち，自由だが超可解でない超平面配置が存在する．

2　グラフ配置

$G = (V_G, E_G)$ を ℓ 個の頂点からなる単純グラフ，つまり

$$V_G = \{1, \ldots, \ell\}\,,$$
$$E_G \subseteq \{\{i, j\} \mid i.j \in V_G,\ i \neq j\}\,,$$

とする．グラフ G に対し，グラフ配置（**graphical arrangement**）$\mathcal{A}_G$ を以下で定める．

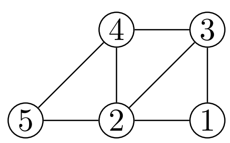
$$\mathcal{A}_G \coloneqq \{\{x_i - x_j = 0\} \mid \{i, j\} \in E_G\}\,.$$

ただし，$\alpha \in (\mathbb{R}^\ell)^*$ に対し，$\{\alpha = 0\} \coloneqq \left\{v \in \mathbb{R}^\ell \mid \alpha(v) = 0\right\}$ としている．グラフ配置 $\mathcal{A}_G$ の超可解性と自由性の特徴づけについて述べるために，いくつかの概念を定義する．

Definition 2.1. G の ℓ 個の頂点の順序付け $(v_1, \ldots, v_\ell)$ が **perfect elimination ordering** であるとは，任意の三つ組 $i, j < k$ $(i \neq j)$ に対して，

$$\{i, k\}, \{j, k\} \in E_G \Rightarrow \{i, j\} \in E_G$$

が成り立つときにいう．



perfect elimination ordering の例

Definition 2.2. G が **chordal** であるとは，G の任意の長さ 4 以上のサイクルが弦（chord）をもつときにいう．

chordal graph と chordless cycle の例

G の部分グラフ $S = (V_S, E_S)$ が誘導部分グラフ（**induced subgraph**）であるとは，

$$E_S = \{\{i,j\} \in E_G \mid i,j \in V_S\}$$

が成り立つときにいう．定義から明らかではあるが，chordal graph は長さ 4 以上のサイクルを誘導部分グラフとしてもたないという禁止誘導部分グラフ（**forbidden induced subgraph**）による特徴づけをもつ．

Theorem 2.3 (Fulkerson-Gross [3, Section 7], Stanley [6, Corollary 4.10], Edelman-Reiner [2, Theorem 3.3])**.** 以下は同値．

(1) G は perfect elimination ordering をもつ．
(2) G は chordal である．
(3) $\mathcal{A}_G$ は超可解である．
(4) $\mathcal{A}_G$ は自由である．

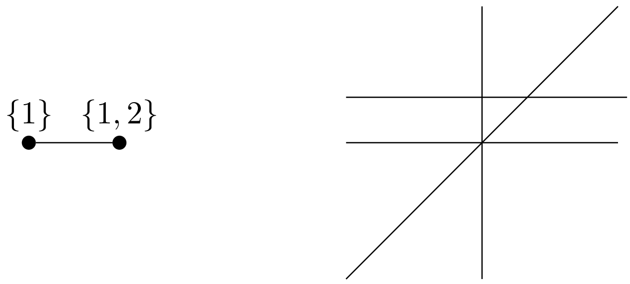
この定理から分かる通り，グラフ配置のクラスにおいては超可解性と自由性は同値になっている．

3　ψ グラフ配置

$G = (V_G, E_G)$ を ℓ 個の頂点からなる単純グラフとし，写像 $\psi\colon V_G \to 2^{\mathbb{R}}$ で各 i について $|\psi(i)| < \infty$ を満たすものをとる．組 (G, ψ) に対して，ψ グラフ配置（**ψ-graphical arrangement**）$\mathcal{A}_{G,\psi}$ を以下で定める．

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{G,\psi} \coloneqq \{\{z=0\}\} &\cup \{\{x_i - x_j = 0\} \mid \{i,j\} \in E_G\} \\ &\cup \{\{x_i = az\} \mid 1 \le i \le \ell, a \in \psi(i)\}.\end{aligned}$$

ここで，$\{z, x_1, \ldots, x_\ell\}$ は $(\mathbb{R}^{\ell+1})^*$ の基底である．ψ グラフ配置 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ は，グラフ G の各頂点に実数の有限集合（重みとみなす）をあてがい，それら各実数に対応する超平面をグラフ配置 $\mathcal{A}_G$ に付け加えたものである（ただし，本稿では自由性に焦点があるため，錐化し，無限遠超平面 $\{z=0\}$ を付け加えている）．



ψ グラフ配置の例（$z = 1$ への制限）

Definition 3.1. (G, ψ) に対し，G の ℓ 個の頂点の順序付け $(v_1, \ldots, v_\ell)$ が **weighted elimination ordering** であるとは，以下を満たすときにいう．

(1) $(v_1, \ldots, v_\ell)$ は perfect elimination ordering.

(2) $i < j,\ \{i, j\} \in E_G \Rightarrow \psi(i) \supseteq \psi(j)$.

Theorem 3.2 (Stanley [7, Theorem 6] Mu-Stanley [5, Theorem 1, 2])．以下は同値．

(1) (G, ψ) は weighted elimination ordering をもつ．

(2) $\mathcal{A}_{G,\psi}$ は超可解である．

一般に超可解な配置は自由なので，(G, ψ) が weighted elimination ordering をもてば，$\mathcal{A}_{G,\psi}$ は自由であることが分かる．Stanley はグラフ配置のときと同様に，ψ グラフ配置のクラスにおいても超可解性と自由性は同値になっているのではないかと予想した．

4 主結果

主結果は以下の通りである．

Theorem 4.1 (Suyama-T [8])．以下は同値．

(1) (G, ψ) は weighted elimination ordering をもつ．

(2) $\mathcal{A}_{G,\psi}$ は超可解．

(3) $\mathcal{A}_{G,\psi}$ は自由．

証明は，(G, ψ) が weighted elimination ordering をもつことの禁止誘導部分グラフによる特徴づけを用いて行った．以下に概略を述べる．

P を半順序集合とする．写像 $\psi\colon V_G \to P$ により，G の各頂点に重みを付け，P 上の頂点重み付きグラフ (G, ψ) を得る．半順序集合 P として $\mathbb{R}$ の有限部分集合全体からなる半

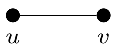
順序集合をとれば，(G,ψ) は ψ グラフ配置の定義に用いていたものと同一のものである．P 上の頂点重み付きグラフ (G,ψ) に対しても，weighted elimination ordering を同様に定義する．G の道 $v_1 \cdots v_k$ が単峰的（**unimodal**）であるとは，ある $i \in \{1,\ldots,k\}$ が存在して，$\psi(v_1) \leq \cdots \leq \psi(v_i) \geq \cdots \geq \cdots \geq \psi(v_k)$ となるときにいう．P は全順序とは限らないので，比較不可能な元が存在するかもしれない．したがって，G の辺 $\{u,v\}$ が単峰的であるとは，$\psi(u)$ と $\psi(v)$ が比較可能であることを意味する．

Theorem 4.2 (Suyama-T [8])．以下は同値．

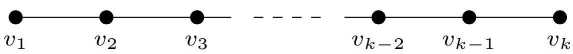
(1) (G,ψ) は weighted elimination ordering をもつ．
(2) G は chordal，かつ G の任意の道は単峰的である．

したがって，禁止誘導部分グラフは長さ 4 以上のサイクルと非単峰的な道といえる．実際にはもっと絞ることができる．

Proposition 4.3 (Suyama-T [8])．非単峰的な道は以下の道のどちらかを含む．

(1) 

$\psi(u)$ と $\psi(v)$ は比較不能．

(2) 

$k \geq 3$ かつ $\psi(v_1) > \psi(v_2) = \cdots = \psi(v_{k-1}) < \psi(v_k)$.

超平面配置の加除定理により，これらの道に対応する ψ グラフ配置は自由でないことが従う．よって，もし $\mathcal{A}_{G,\psi}$ が自由であれば G は chordal で，かつ G の任意の道は単峰的であることが分かる．したがって，(G,ψ) は weighted elimination ordering をもつので主結果が従う．

また，自由 ψ グラフ配置 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ に対し，$D(\mathcal{A}_{G,\psi})$ の基底を具体的に構成した．

Theorem 4.4 (Suyama-T [8])．ψ グラフ配置 $\mathcal{A}_{G,\psi}$ は weighted elimination ordering $(v_1,\ldots,v_\ell)$ をもつとする．x_i を頂点 v_i に対応する座標とする．このとき，

$$\theta_E = \sum_{i=1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\theta_k = \sum_{i \in C_{\geq k}} \left(\prod_{j \in E_{<k}} (x_j - x_i) \prod_{a \in \psi(v_k)} (x_i - az) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1 \leq k \leq \ell)$$

は $D(\mathcal{A}_{G,\psi})$ 基底をなす．ただし，

$$\begin{aligned} C_{\geq k} &\coloneqq \{i \mid k < i \leq \ell,\ \text{かつ } G \text{ の道 } v_k v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_m} v_i \\ &\qquad\qquad\qquad \text{が存在して } k < j_1, j_2, \ldots, j_m \leq \ell\} \cup \{k\} \\ E_{<k} &\coloneqq \{j \mid 1 \leq j < k,\ \{v_j, v_k\} \in E_G\}. \end{aligned}$$

参考文献

[1] A. Björner, P. H. Edelman, and G. M. Ziegler, Hyperplane arrangements with a lattice of regions, *Discrete & computational geometry* **5** (1990), no. 1, 263–288.

[2] P. H. Edelman and V. Reiner, Free hyperplane arrangements between A_{n-1} and B_n, *Math. Z.* **215** (1994), no. 3, 347–365.

[3] D. R. Fulkerson and O. A. Gross, Incidence matrices and interval graphs, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 835–855.

[4] M. Jambu and H. Terao, Free arrangements of hyperplanes and supersolvable lattices, *Adv. in Math.* **52** (1984), no. 3, 248–258.

[5] L. Mu and R. P. Stanley, Supersolvability and freeness for ψ-graphical arrangements, *Discrete Comput. Geom.* **53** (2015), no. 4, 965–970.

[6] R. P. Stanley, An introduction to hyperplane arrangements, in *Geometric combinatorics*, IAS/Park City Math. Ser., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 389–496.

[7] R. P. Stanley, Valid orderings of real hyperplane arrangements, *Discrete Comput. Geom.* **53** (2015), no. 4, 951–964.

[8] D. Suyama and S. Tsujie, Freeness of ψ-graphical arrangements and chordality of vertex-weighted graphs, (2015), arXiv:1511.04853.