Gorenstein Fano polytope arising from order polytopes and chain polytopes

土谷　昭善 (Akiyoshi TSUCHIYA)　(大阪大学大学院情報科学研究科)*

本原稿は大阪大学の日比孝之氏と松田一徳氏との共同研究 [3] に基づく.

1. 準備

1.1. 整凸多面体と Ehrhart 多項式

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体, つまり各頂点の座標が全て整数であるような d 次元の凸多面体とする. 整凸多面体 $\mathcal{P}$ が**正規**であるとは, 任意の整数 $N > 0$ および任意の $\mathbf{a} \in N\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ に対し, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N$ を満たす $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ が存在するときをいう. ここで $N\mathcal{P} = \{N\alpha \mid \alpha \in \mathcal{P}\}$ である.

また, 整凸多面体 $\mathcal{P}$ が **Fano** であるとは, その内部に含まれる整数点が $\mathbb{R}^d$ の原点のみであるときをいう. さらに, Fano な整凸多面体 $\mathcal{P}$ が **Gorenstein Fano** であるとは, その双対多面体

$$\mathcal{P}^\vee := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1 \text{ for all } \mathbf{y} \in \mathcal{P}\}$$

も整であるときをいう. ここで, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積である.

任意の正整数 n について関数 $i(\mathcal{P}, n)$ を

$$i(\mathcal{P}, n) := |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$$

で定義する. この時, 以下が知られている.

- $i(\mathcal{P}, n)$ は, n に関する d 次多項式であり, 定数項は常に 1 である.
- $i(\mathcal{P}, n)$ の最高次の係数は $\mathcal{P}$ の通常の体積と一致する.

この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ.

1.2. 順序凸多面体と鎖凸多面体

$P = \{p_1, \ldots, p_d\}$ を d 元からなる半順序集合とする. $I \subset P$ が**ポセットイデアル**とは, 条件 "$a \in I, b \in P, b < a$ ならば $b \in I$" を満たすものをいう. P のポセットイデアル全体の集合を $\mathcal{J}(P)$ で表す. また, $A \subset P$ が**反鎖**とは, A の全ての元が P で比較不可能なものをいう. P の反鎖全体の集合を $\mathcal{A}(P)$ で表す. 空集合 $\emptyset$ はポセットイデアルおよび反鎖とみなす.

各 $I \subset P$ に対し, $\rho(I) := \sum_{p_i \in I} \mathbf{e}_i$ と定める (ここで $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ は $\mathbb{R}^d$ の単位座標ベクトル). 半順序集合 P から次の 2 種類の整凸多面体が構成できる.

$$\mathcal{O}(P) := \mathrm{conv}(\{\rho(I) | I \in \mathcal{J}(P)\})$$

* e-mail: a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

$$\mathcal{C}(P) := \mathrm{conv}(\{\rho(A) | I \in \mathcal{A}(P)\})$$

$\mathcal{O}(P)$ を**順序凸多面体**, $\mathcal{C}(P)$ を**鎖凸多面体**という．この 2 種類の整凸多面体の Ehrhart 多項式が一致する, つまり

$$i(\mathcal{O}(P), n) = i(\mathcal{C}(P), n)$$

が成り立つことが知られている ([5])．特に, $\mathcal{O}(P)$ と $\mathcal{C}(P)$ の体積は一致する．

1.3. トーリック環とトーリックイデアル

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする．このとき

$$K[\mathcal{P}] := K[x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} t : (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathcal{P}\ ] \subset K[x_1, \ldots, x_d, t]$$

は $\mathcal{P}$ に付随する**トーリック環**という．またこのトーリック環の定義イデアル $I_{\mathcal{P}}$ を $\mathcal{P}$ に付随する**トーリックイデアル**という．$\mathcal{P}$ が正規の時, $K[\mathcal{P}]$ の Hilbert 関数と, $\mathcal{P}$ の Ehrhart 多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ が一致することが知られている．

2. 順序凸多面体と鎖凸多面体に付随する正規 Gorenstein Fano 凸多面体

$P = \{p_1, \ldots, p_d\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_d\}$ を, ともに d 元からなる半順序集合とする．P と Q に付随する順序凸多面体と鎖凸多面体を組み合わせ, 次の 3 種類の整凸多面体を構成する．

$$\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q)) := \mathrm{conv}\{\mathcal{O}(P) \cup -(\mathcal{O}(Q))\}$$

$$\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q)) := \mathrm{conv}\{\mathcal{O}(P) \cup -(\mathcal{C}(Q))\}$$

$$\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q)) := \mathrm{conv}\{\mathcal{C}(P) \cup -(\mathcal{C}(Q))\}$$

ここで整凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に対して $-\mathcal{P} := \{-\alpha \in \mathbb{R}^d | \alpha \in \mathcal{P}\}$ である．

$[d] = \{1, \ldots, d\}$ の置換 $\sigma = i_1 i_2 \cdots i_d$ が P の**線形拡張**であるとは, $p_{i_a} < p_{i_b}$ であれば $i_a < i_b$ を満たすものをいう．P と Q が共通の線形拡張を持つことと, $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q))$ が正規 Gorenstein Fano 凸多面体となることは同値であることが知られている ([1])．また, $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$ と $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$ が常に正規 Gorenstein Fano 凸多面体であることも [2] と [4] で知られている．この結果はこれら 3 種類の整凸多面体に付随するトーリックイデアルのグレブナー基底を計算することで, 示すことができる．

3. 3 種類の正規 Gorenstein Fano 凸多面体の Ehrhart 多項式

グレブナー基底の形から以下の定理が得られる．

定理 1 P と Q を $|P| = |Q| = d$ となる半順序集合とする．このとき,

$$i(\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q)), n) = i(\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q)), n)$$

が成り立つ．特に, $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$ と $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$ の体積は一致する．

さらに P と Q が共通の線形拡張を持つとき,

$$i(\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q)), n) = i(\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q)), n) = i(\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q)), n)$$

が成り立つ．特に, $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q)), \Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$ と $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$ の体積は一致する．

4. 3種類の正規Gorenstein Fano凸多面体のsmooth性

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元Fano凸多面体とする．$\mathcal{P}$ が $\mathbb{Q}$-factorialであるとは,$\mathcal{P}$ が単体的, つまり各ファセットが単体となっているときにいう．$\mathcal{P}$ がsmoothであるとは, 各ファセットの頂点の集合が $\mathbb{Z}^d$ の $\mathbb{Z}$ 基底となっているときにいう．$\mathcal{P}$ がsmooth Fanoならば, $\mathbb{Q}$-factorialかつGorensteinである．

3種類の正規Gorenstein Fano凸多面体が, いつsmoothになるかを特徴付けることができた．

定理 2 $d \geq 2$ に対して, P と Q を $|P| = |Q| = d$ となる半順序集合とする．P と Q は共通の線形拡張を持つと仮定する．このとき,次は同値となる:

(i) $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q))$ は $\mathbb{Q}$-factorialである;

(ii) $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q))$ はsmoothである;

(iii) $\mathcal{J}(P) = \{\{p_{i_1}\}, \{p_{i_1}, p_{i_2}\}, \ldots, \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_d}\}\}$ または
$\mathcal{J}(P) = \{\{p_{i_1}\}, \{p_{i_2}\}, \{p_{i_1}, p_{i_2}\}, \ldots, \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_d}\}\}$, かつ
$\mathcal{J}(Q) = \{\{q_{i_1}\}, \{q_{i_1}, q_{i_2}\}, \ldots, \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_d}\}\}$ または
$\mathcal{J}(Q) = \{\{q_{i_1}\}, \{q_{i_2}\}, \{q_{i_1}, q_{i_2}\}, \ldots, \{q_{i_1}, \ldots, q_{i_d}\}\}$.

定理 3 $d \geq 2$ に対して, P と Q を $|P| = |Q| = d$ となる半順序集合とする．このとき,次は同値となる:

(i) $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$ は $\mathbb{Q}$-factorialである;

(ii) $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$ はsmoothである;

(iii) $\mathcal{J}(P) = \{\{p_{i_1}\}, \{p_{i_1}, p_{i_2}\}, \ldots, \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_d}\}\}$ または
$\mathcal{J}(P) = \{\{p_{i_1}\}, \{p_{i_2}\}, \{p_{i_1}, p_{i_2}\}, \ldots, \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_d}\}\}$, かつ
$\mathcal{A}(Q) = \{\{q_{i_1}\}, \{q_{i_2}\}, \ldots, \{q_{i_d}\}\}$ または
$\mathcal{A}(Q) = \{\{q_{i_1}\}, \{q_{i_2}\}, \ldots, \{q_{i_d}\}, \{q_{i_1}, q_{i_2}\}\}$;

定理 4 $d \geq 2$ に対して, P と Q を $|P| = |Q| = d$ となる半順序集合とする．このとき,次は同値となる:

(i) $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$ は $\mathbb{Q}$-factorialである;

(ii) $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$ は smoothである;

(iii) 任意の$I_1, I_2 \in \mathcal{A}_2(P)(I_1 \neq I_2)$ に関して$I_1 \cap I_2 = \emptyset$ であり, 任意の $J_1, J_2 \in \mathcal{A}_2(Q)(J_1 \neq J_2)$ に関して $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ であり, 任意の$I \in \mathcal{A}_2(P)$ と任意の $J \in \mathcal{A}_2(Q)$ に関して $|I \cap J| \neq 1$ となる.

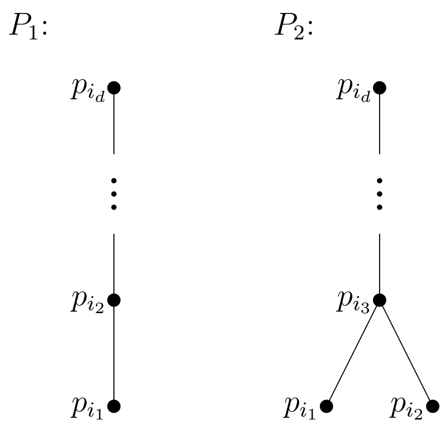
5. 3種類のsmooth Fano凸多面体とunimodular同値

d次元整凸多面体$\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ について, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が **unimodular 同値**であるとは, unimodular 行列$U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ と整数ベクトル$w \in \mathbb{Z}^d$ が存在して, U により定義される線形写像$f_U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を用いて$\mathcal{Q} = f_U(\mathcal{P}) + w$ とできる時に言う. ここで$v \in \mathbb{R}^d$ に対し、$f_U(v) = vU$ と定める. unimodular同値は整凸多面体の分類に使われており, Gorenstein Fano凸多面体およびsmooth Fano凸多面体は, unimodular同値なものを除けば,各次元に有限個しか存在しないことが知られている.

半順序集合 P と Q を固定して, 3 種類の Gorenstein Fano 凸多面体がすべてsmooth となるとき, お互いが unimodular 同値となるか調べた. 以下がその結果である.

定理 5 $d \geq 3$ に対して, P と Q を $|P| = |Q| = d$ となる半順序集合とする. $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q))$, $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$ と $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$ がすべて smooth であると仮定する. このとき, $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q))$ と $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$ は unimodular 同値である. しかし, $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$ はこれらと unimodular 同値とならない. さらに, $P \neq Q$であれば, $\Gamma(\mathcal{O}(Q), -\mathcal{C}(P))$ もまた smoothであり, $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$ とはunimodular 同値とならない.

Remark 6 $d = 2$のときは, 3種類のsmooth Fano凸多面体はお互いunimodular同値となる. さらに3種類のGorenstein Fano凸多面体がすべてsmoothとなるのは, PとQが以下のP_1かP_2のいずれかになるときである.



最後に, これらの結果から, 次の系が得られる.

Corollary 7 任意の$d \geq 3$に対して, smooth Fano凸多面体$\mathcal{P}$と$\mathcal{Q}$で次の条件を満たすものが存在する:

- $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は同じEhrhart多項式を持つ.

- $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ はunimodular同値ではない.

参考文献

[1] T. Hibi and K. Matsuda, Quadratic Gröbner bases of twinned order polytopes, arXiv:1505.04289.

[2] T. Hibi, K. Matsuda and A. Tsuchiya, Quadratic Gröbner bases arising from partially ordered sets, *Math. Scand.*, to appear.

[3] T. Hibi, K. Matsuda and A. Tsuchiya, Gorenstein Fano polytopes arising from order polytopes and chain polytopes, arXiv:1507.03221.

[4] H. Ohsugi and T. Hibi, Reverse lexicographic squarefree initial ideals and Gorenstein Fano polytopes, arXiv:1410.4786.

[5] R. P. Stanley, Two poset polytopes, *Disc. Comput. Geom.* **1** (1986), 9–23.