有限群の整数値指標と necklace ring の有限の台を持つ元に関する考察 *

九州大学大学院数理学府
田村 朋之 (Tomoyuki Tamura)

概要

有限群の複素数体上の有限次元表現は, その交代テンソル積表現の指標の母関数を通じ N.Metropolis(1983) が導入した necklace ring の元を一つ定める. 本講演では表現の指標が整数値であることと, 対応した元が有限の台をもつことの同値性を述べ, 特に交代テンソル積表現の指標の母関数が有限積で記述出来ることを説明する. またこのような特徴を持つ necklace ring の元の乗法について述べる.

1 導入

1.1 交代テンソル積表現の指標の母関数の計算

G を有限群とする. G の $\mathbb{C}$ 上有限次元表現 $\rho : G \to GL(V)$ が与えられた時, 任意の非負整数 $i = 0, 1, 2, \dots$ に対し交代テンソル積表現 $\Lambda^i\rho : G \to GL(\bigwedge^i(V))$ が任意の $g \in G$ と $v_1, \dots,\ v_i \in V$ に対し次で定まる.

$$\Lambda^i\rho(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_i) := (\rho(g)v_1) \wedge \cdots \wedge (\rho(g)v_i).$$

この交代テンソル積表現の指標の計算方法として, Grothendieck が 1956 年に考案した λ-ring と呼ばれる可換環の構造を用いる手法が存在する. G の類関数全体の集合を $CF(G)$ とすると, $CF(G)$ には値による加法・乗法・スカラーにより $\mathbb{Q}$-algebra の構造を持ち, さらに次の Adams operation を持つような λ-ring の構造が一意に定義される.

$$\psi^n(f)(g) := f(g^n) \tag{1.1}$$

但し $f : G \to \mathbb{C}, g \in G$, n は自然数とする. そして χ を G の表現 V の指標とすると, 交代テンソル積表現 $\Lambda^i(V)$ の指標は χ を λ-ring としての λ-operation によって移した像 $\lambda^i(\chi)$ であることが知られている ([Knu] p.84).

有限群の表現論において表現の指標を知ることはその既約分解, つまり表現の構造を知ることと同値である. さらに交代テンソル積表現の構造を知ることは, 群の表現環 $R(G)$ の λ-ring としての構造を知る上でも重要であると思われる.

交代テンソル積表現の指標をどのようにして計算するか, という問題は Knutson が [Knu] にて提起した. Boorman[Bo] が 1975 年に対称群で, Bryden[Bry] が 1999 年にワイル群 $W(B_n), W(D_n)$ で, それぞれ λ-ring

---

* 本稿は北海道大学における第 12 回数学総合若手研究集会のテクニカルレポートである.
Keyword: finite group; representation theory; character theory; λ-ring; exterior powers representations; necklace ring

としての生成元を述べている．また, 1995 年に Osse [Os] がコンパクト連結リー群の場合における表現間の λ-ring としての特徴づけを行っている．しかし Yau は [Yau] p.171 にて, Osse のコンパクト連結リー群における特徴付けの有限群の場合が未解決であると述べている．このように, 交代テンソル積表現の指標を求める統一的な解法は未だ全容が明かされていないのではないかと考えられる．

1.2 母関数と necklace ring を用いた手段

講演者はこの指標を調べる為に, その母関数

$$\lambda_t(\chi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\chi)t^i, \quad \lambda_t(\chi)(g) := \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\chi)(g)t^i \quad (g \in G)$$

に注目した. この母関数について交代テンソル積表現の性質から次の表記が知られている．$m = \dim_{\mathbb{C}} V$ とすると,

$$\lambda_t(\chi)(g) = \det(I_m + \rho(g)t) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{\chi(g^i)}{i}(-t)^i\Big) \quad (g \in G)$$

が成り立つ. 但し, 行列 I_m はサイズ m の単位行列である．これは定数項が 1 である冪級数の一つである．

Example 1.1. 有限群 G が有限集合 X に作用しているとする．これによって定義される置換表現の指標を χ とおくと, 任意の $g \in G$ に対し

$$\chi(g) = |\mathrm{Fix}(g)|, \quad \mathrm{Fix}(g) := \{x \in X \mid gx = x \text{ for any } g \in G\}$$

となることが知られているので,

$$\lambda_t(\chi)(g) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{|\mathrm{Fix}(g^i)|}{i}(-t)^i\Big)$$

となる．

講演者はこれまで交代テンソル積表現の指標を, Knutson の結果を下地とし, 1983 年に N.Metropolis と Rota によって定義された necklace ring を用いて研究してきた．

1983 年, N.Metropolis と Rota は [Met] において, Witt ring の解析を目的とし necklace ring の概念を導入した．R を可換環としたとき, R 上 necklace ring $Nr(R)$ は次のように定義される．集合としては $R^{\mathbb{N}}$ であり, これは R の元の無限列の全体である．但し本稿では便宜上, $\mathbb{N}$ から R への写像全体の集合とする. そして $\alpha, \beta \in Nr(R)$ としたとき, 加法 “$+_{Nr}$” と乗法 “$\cdot_{Nr}$” は次のように定義される．

$$\alpha +_{Nr} \beta(n) := \alpha(n) + \beta(n), \quad \alpha \cdot_{Nr} \beta(n) := \sum_{[i,j]=n} (i,j)\alpha(i)\beta(j). \tag{1.2}$$

但し n は自然数とする．さらに任意の自然数 i, j に対し $[i, j]$ はその最小公倍数を,(i, j) はその最大公約数を表すとする．

この necklace ring と有限群の表現の指標を次のように結びつける．まず, 任意の可換環 R に対し universal λ-ring を $\Lambda(R)$ とする．この集合は加法 “$+_\Lambda$” と乗法 “$\cdot_\Lambda$” が定義された λ-ring の一つで, Grothendieck によって導入された．さらに R が binomial ring (Adams operations が全て恒等写像となるような λ-ring の構

造を持つもの) であるとき, 任意の $f \in \Lambda(R)$ に対し, $\alpha \in Nr(R)$ が唯一つ存在し,

$$f(t) = \prod_{i=1}^{\infty}(1-(-t)^i)^{\alpha(i)} \tag{1.3}$$

と書くことができる ([Yau] Section 5.6). この全単射の対応を $E_{Nr} : \Lambda(R) \to Nr(R)$ と記す.

この $f(t)$ として交代テンソル積表現の指標の母関数 $\lambda_t(\chi) \in \Lambda(\mathrm{Map}(G, \mathbb{C}))$ とすると, 交代テンソル積表現の指標を求める問題はこの $E_{Nr}(\lambda_t(\chi)) \in Nr(\mathrm{Map}(G, \mathbb{C}))$ を求める問題へと変わる.

講演者はこの指標 χ が整数値指標, つまり任意の $g \in G$ に対し $\chi(g)$ が整数であるような指標に対し 2 種類の結果を得た. 本稿の構成は次の第 2 章で本稿の主結果及び証明の概略を述べるための準備を行う. そして第 3 章と第 4 章にて, 次の結果を述べる.

- G を有限群, e を G の exponent(全ての元の位数の最小公倍数), χ を仮想指標 (既約指標の整数和で記述される指標), $\alpha = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$ とする. 第 3 章では χ が整数値であること, $\lambda^i(\chi)$ も全て整数値であること, $\alpha(n)(g)$ が全て整数であることを示す. さらに, $n \nmid e$ ならば $\alpha(n) = 0$ となることと同値であることを示す (Theorem 3.2). 特に α が有限の台を持つ ($|\{n \mid \alpha(n) \neq 0\}| < \infty$) ことが示され, 母関数 $\lambda_t(\chi)$ が有限積の形で記述出来ることを示す.
  さらに, $g \in G$ に関する母関数 $\lambda_t(\chi)(g)$ がより少ない数の積で記述できる場合があることを示す (Theorem 3.3).
- 第 4 章では, 有限群 $G_1 \times G_2$ の場合について考える. まず, G_1 の仮想指標 χ_1 と G_2 の仮想指標 χ_2 から定義される $G_1 \times G_2$ の仮想指標 $\chi_1\chi_2$ ($\chi_1\chi_2((g_1, g_2)) := \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$) において $\lambda_t(\chi_1\chi_2)((g_1, g_2)) = \lambda_t(\chi_1)(g_1) \cdot_\Lambda \lambda_t(\chi_2)(g_2)$ と分解されることを示す (Proposition 4.1). さらにこのとき χ_1, χ_2 が整数値指標であるとすると, 両辺を写像 E_{Nr} で移すことで, 左辺を求めるために有限の台を持つ necklace ring の元の積がどのように表されるかという問題に移る. これの表し方の一つとして, 講演者は Frobenius operation([Met]) を用いる新たな形を $\mathbb{Q}$-algebra である可換環 R の視点より導いた (Proposition 4.5).

なお, 本稿においては扱う有限群の表現は全て複素数体上の有限次元表現とし, 可換環については単位元の存在を仮定する.

2 準備

この章では, 主結果を述べるに必要な記号等を定義する. 但し, 本稿では necklace ring と ghost ring やその operation のみに焦点を絞る. 有限群の表現や λ-ring については [Knu], [Yau] を参照されたい.

2.1 necklace ring と ghost ring

この節では necklace ring や ghost ring の定義を行う. 詳しくは [Yau] Section 2, もしくは Section 5.6 等を参照されたい. R を単位元を持つ可換環とする.

$\Lambda(R)$ を定数項が単位元であるような R の元を係数とする 1 変数巾級数の全体と定義する. $\Lambda(R)$ は巾級数の乗法を加法とするような λ-ring の構造が定義される. また, R が λ-ring ならば写像 $\lambda_t : R \to \Lambda(R)$ が λ-homomorphsim(環準同型であり λ-operation を交換する写像) であることに注意したい.

R 上の necklace ring $Nr(R)$ は §1.2 で述べたように, 写像 $\mathbb{N} \to R$ の全体に (1.2) のような演算を以て可換環とみなしたものである. R 上の ghost ring $Gh(R)$ は集合として $Nr(R)$ に等しく, component wise による

演算で可換環とみなしたものである.

写像 $\phi : Nr(R) \to Gh(R)$ を, $\phi(\alpha)(n) = \sum_{d|n} d\alpha(d)$ と定義する. 但し, $\alpha \in Nr(R)$, n を自然数とする. このとき R が $\mathbb{Q}$-algebra ならば, メビウスの反転公式を用いると任意の自然数 n に対し

$$\alpha(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\phi(\alpha)(d)$$

を得る. 但し, 写像 μ はメビウス関数である. 写像 $z : \Lambda(R) \to Gh(R)$ を, $\sum_{i=1}^{\infty} z(f)(i)(-t)^i = -tf'f^{-1}$ を満たすように定義する $(f \in \Lambda(R))$. R が λ-ring であるとき, Adams operation の定義から任意の $r \in R$ に対し

$$z \circ \lambda_t(r)(n) = \psi^n(r)$$

が成り立つ. 写像 z, ϕ は共に環準同型写像であり, $\mathbb{Q}$-algebra ならば全単射である.

R が binomial ring であるとは $\mathbb{Z}$-torsion-free であって, Adams operation ψ^n が全て恒等写像となるような λ-ring の構造を持つものと定義する. このとき, 任意の $r \in R$ に対し, 巾級数 $(1+t)^r = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{r}{i}t^i$ が定義可能となる. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$-algebra は binomial ring である. またこのとき, 任意の $f \in \Lambda(R)$ に対し (1.3) を満たす $\alpha \in Nr(R)$ がただ一つ存在する. この対応を写像 $E_{Nr} : \Lambda(R) \to Nr(R)$ と定義する. これは全単射であり, $z = \phi \circ E_{N_r}$ が成り立つ. 加え, 環同型写像である.

2.2 Truncated operations と Frobenius operations

次に, necklace ring と ghost ring に定義される Truncated operations と Frobenius operations について述べる.

Definition 2.1. 任意の自然数 r に対し, r-th Truncated operation

$$T_r : Nr(R) \to Nr(R), \quad T_r : Gh(R) \to Gh(R)$$

を次のように定義する. 任意の $\alpha \in Nr(R), \beta \in Gh(R)$, 自然数 n に対し,

$$T_r(\alpha)(n) := \begin{cases} \alpha(n) & (\text{if } r \mid n) \\ 0 & (\text{if } r \nmid n) \end{cases}, \quad T_r(\beta)(n) := \beta((n,r)).$$

Truncated operation は環準同型写像であるほか, $T_r \circ T_s = T_{(r,s)}$, $T_r \circ \phi = \phi \circ T_r$ が成り立つ. 本稿における有限の台をもつ necklace ring の元とは $\bigcup_{r=1}^{\infty} \mathrm{Im}(T_r)$ の元として実現されることを特に注意したい.

次に Frobenius operation について述べる.

Definition 2.2. 任意の自然数 r に対し, r-th Frobenius operation

$$F_r : Nr(R) \to Nr(R), \quad F_r : Gh(R) \to Gh(R)$$

を次のように定義する. 任意の $\alpha \in Nr(R), \beta \in Gh(R)$, 自然数 n に対し,

$$F_r(\alpha)(n) := \sum_{[j,r]=nr}\frac{j}{n}a(j), \quad F_r(\beta)(n) := \alpha(nr).$$

necklace ring における Frobenius operation は N.Metropolis [Met] によって, necklace ring と合わせて紹介されている. 他方, ghost ring における Frobenius operation は λ-ring の理論における, 集合 $R^{\mathbb{N}}$ に標準的に備わる ψ-ring の operator と同じで, Adams operation から λ-ring の構造を定める為に用いられる. Frobenius operation も同様に環準同型写像であり, $F_r \circ F_s = F_{rs}, \phi \circ F_r = F_r \circ \phi$ が成り立つ. 証明は [Var] を参照されたい.

3 主結果その 1：整数値指標と necklace ring

G を有限群, $CF(G)$ を G の類関数全体とする. §1.1 でも述べたが, $CF(G)$ には値による加法・乗法・スカラーにより $\mathbb{Q}$-algebra の構造を持ち, さらに (1.1) を満たす Adams operation を持つような λ-ring の構造が一意に定義される. そして χ を G の表現 V の指標とすると, 交代テンソル積表現の指標は $\lambda^i(\chi)$ である.

この章ではこれまでの準備を用いて, 本稿の主結果を述べる. まず, 主結果の主となる整数値指標について定義する.

Definition 3.1. $\chi \in CF(G)$ は G の既約指標の整数係数和であるとき, 仮想指標 (virtual character) であるという. 仮想指標 χ が整数値指標であるとは, 任意の $g \in G$ に対し $\chi(g)$ が整数であるとする.

以下, e を G の exponent(全ての元の位数の最小公倍数), χ を G の仮想指標, $\alpha = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$ とする.

Theorem 3.2 ([Ta])**.** *次の 3 条件は同値である.*

(1) χ *は整数値指標である.*
(2) *任意の自然数* i *に対し* $\lambda^i(\chi)$ *は整数値指標である.*
(3) *任意の自然数* n *と* $g \in G$ *に対し* $\alpha(n)(g)$ *は整数である.*

ここで, $\alpha(n) \in CF(G)$ *は必ずしも仮想指標ではないことに注意したい. さらに次の 2 条件は同値である.*

(1) χ *は整数値指標である.*
(4) $\alpha \in \mathrm{Im}(T_e)$ *が成り立つ.*

特に χ が整数値指標ならば $n \nmid e$ なる自然数 n に対し $\alpha(n) = 0$ となるので, 次が成り立つ.

$$\lambda_t(\chi) = \prod_{d|e}(1-(-t)^d)^{\alpha(d)}$$

これにより, 整数値の指標が交代テンソル積表現の指標を通じて有限の台を持つ necklace ring の元と対応されることがわかった.

証明の概略は, 整数値指標の Adams operation による特徴づけである. つまり, χ が整数値指標であることと $\psi^k(\chi) = \psi^{(k,e)}(\chi)$ が任意の自然数 k に対し成り立つことが同値であることを用いる ([Ta]). (1), (2), (3) は λ-ring の Adams operation が λ-homomorphism であることと $\mathbb{Z}$ が binomial ring である事実を活用する. (4) については整数値指標の特徴づけから $\phi(\alpha) = z \circ \lambda_t(\chi) \in \mathrm{Im}(T_e)$ であることを用いれば, Truncated operations が写像 ϕ で保存されること ($T_r \circ \phi = \phi \circ T_r$) より示すことができる.

$g \in G$ に関する母関数 $\lambda_t(\chi)(g)$ については定義域を部分群 H に制限する写像 $\mathrm{Res}^G_H : CF(G) \to CF(H)$ が λ-homomorphism であることを用いると次が成り立つ.

Theorem 3.3 ([Ta])**.** 仮想指標 χ がある $g \in G$ より生成される巡回群 $\langle g \rangle$ 上で整数値であるとすると, 任意の自然数 n に対し $\alpha(n)(g) \in \mathbb{Z}$ が成り立ち, $E_{Nr}(\lambda_t(\chi)(g)) \in \mathrm{Im}(T_{O(g)})$ が成り立つ. 但し $O(g) \geq 1$ は $g \in G$ の位数である. 特に次の式を得る.

$$\lambda_t(\chi)(g) = \prod_{d|O(g)} (1-(-t)^d)^{\alpha(d)(g)}.$$

証明の方針は $G = \langle g \rangle, \mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle}(\chi)$ として Theorem 3.2 を用いる. 巡回群 $\langle g \rangle$ の exponent は $O(g)$ である. .

Example 3.4. n 次対称群が集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ に自然に作用している場合を考える. この置換表現の指標を χ とおくと,

$$\lambda_t(\chi)(\sigma) = \prod_i (1-(-t)^{|\sigma_i|})$$

を得る. 但し, $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_j$ と, 互いに素な巡回置換の積に分解しているものとする. そして $|\sigma_i|$ は巡回置換としての長さとする.

4 主結果その 2 : 直積群について

最後に直積群の整数値指標と necklace ring の乗法の計算方法について考察する. まず, 直積群の指標において, 母関数の分解式を述べる.

Proposition 4.1. G_1, G_2 を有限群, χ_1, χ_2 をそれぞれ G_1, G_2 の仮想指標とする. $G_1 \times G_2$ の仮想指標 $\chi_1\chi_2$ を $\chi_1\chi_2((g_1, g_2)) := \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)(g_1 \in G_1, g_2 \in G_2)$ と定義すると,

$$\lambda_t(\chi_1\chi_2)((g_1, g_2)) = \lambda_t(\chi_1)(g_1) \cdot_\Lambda \lambda_t(\chi_2)(g_2) \tag{4.1}$$

が成り立つ.

特に χ_1 が G_1 の表現 ρ_1 の指標, χ_2 が G_2 の表現 ρ_2 の指標とすると, $\chi_1\chi_2$ は 直積表現 $G_1 \times G_2$ の表現 $\rho_1 \otimes \rho_2$ の指標である.

証明の方針は両辺を全単射写像 $\phi \circ E_{Nr}$ で移し, Adams operation を比較する.

直積群の交代テンソル積表現の指標の母関数はこのような形で表すことができる. ここで, 式 (4.1) の両辺を写像 E_{Nr} で写すと, 次の式を得る.

$$E_{Nr}(\lambda_t(\chi_1\chi_2)((g_1, g_2))) = E_{Nr}(\lambda_t(\chi_1)(g_1)) \cdot_{Nr} E_{Nr}(\lambda_t(\chi_2)(g_2)) \tag{4.2}$$

ここで, 仮想指標 χ_1, χ_2 が整数値指標であると仮定し, (4.2) の左辺を計算したいとする. これが計算できれば, 直積群 $G_1 \times G_2$ の整数値指標 $\chi_1\chi_2$ について, 交代テンソル積表現の指標の母関数を知ることができる.

このとき, (4.2) の右辺にある二つの母関数は Theorem 3.3 よりそれぞれ $\mathrm{Im}(T_{O(g_1)})$, $\mathrm{Im}(T_{O(g_2)})$ の元の積である. この左辺の計算は necklace ring の乗法の定義に基づいて計算することができる. ここでは, Truncation operations の像に属する二つの元の積のメビウスの反転公式と Frobenius operation を用いた別の表記方法を紹介する.

この表記方法は $CF(G)$ や $\mathbb{C}$ のみならず $\mathbb{Q}$-algebra であればどのような可換環であっても成り立つ. 即ち, R を $\mathbb{Q}$-algebra, $\alpha, \beta \in Nr(R)$ とし,a, b, r を自然数とする. ここで, $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)(r)$ に対し表示を得られれば, $R = \mathbb{C}, \alpha = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))(g_1), \beta = E_{Nr}(\lambda_t(\chi_2)(g_2), a = O(g_1), b = O(g_2)$ とおけばよい.

まず, この計算が $r = [a, b]$ の場合に帰着出来ることを述べる.

Lemma 4.2. $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta) \in \mathrm{Im}(T_{[a,b]})$ が成り立つ．即ち $r \nmid [a,b]$ ならば $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)(r) = 0$ である．

証明は Truncated operations の性質から導くことができる．このことから, $r \mid [a,b]$ の場合に目を向ければよいことがわかる．

Lemma 4.3. $r \mid [a,b]$ とする．このとき, $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)(r) = T_{(a,r)}(\alpha) \cdot_{Nr} T_{(b,r)}(\beta)(r)$ が成り立つ．

証明は左辺を T_r で移せばよい．このとき特に $[(a,r),(b,r)] = r$ が成り立つので, $r = [a,b]$ の場合に目を向ければよいことがわかる．

Remark 4.4. Lemma 4.2 と Lemma 4.3 は, その証明に R が $\mathbb{Q}$-algebra であることを要請しないことを注意しておく．この二つはどの可換環であっても成り立つ．

ここで, $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)([a,b])$ に注目する．

Proposition 4.5. *R を $\mathbb{Q}$-algebra とする．$\alpha, \beta \in Nr(R)$ とし,a, b を自然数とする．a, b の素因数分解を $a = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}, b = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k} (s_i, t_i \geq 0)$ としたとき,*

$$a_1 = \prod_{i; s_i > t_i} p_i^{s_i}, \quad a_2 = \prod_{i; s_i = t_i} p_i^{s_i}, \quad a_3 = \prod_{i; s_i < t_i} p_i^{s_i},$$
$$b_1 = \prod_{i; s_i > t_i} p_i^{t_i}, \quad b_2 = \prod_{i; s_i = t_i} p_i^{t_i}, \quad b_3 = \prod_{i; s_i < t_i} p_i^{t_i}$$

とおく．特に $a = a_1 a_2 a_3, b = b_1 b_2 b_3$ である．このとき次が成り立つ．

$$T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)([a,b]) = \frac{1}{a_2} \sum_{d_2 \mid a_2} \mu\Big(\frac{a_2}{d_2}\Big) F_{a_1 d_2}(\alpha)(a_3) F_{d_2 b_3}(\beta)(b_1).$$

特に $a_2 = b_2 = 1$ の時は,

$$T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)([a,b]) = F_{a_1}(\alpha)(a_3) F_{b_3}(\beta)(b_1)$$

が成り立つ．

証明の概略は, 左辺を

$$\begin{aligned}\phi^{-1} \circ \phi(T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta))([a,b]) &= \frac{1}{[a,b]} \sum_{d \mid [a,b]} \mu\Big(\frac{[a,b]}{d}\Big) \phi \circ T_a(\alpha)(d) \phi \circ T_b(\beta)(d) \\ &= \frac{1}{[a,b]} \sum_{d \mid [a,b]} \mu\Big(\frac{[a,b]}{d}\Big) \phi(\alpha)((a,d)) \phi(\beta)((b,d))\end{aligned}$$

と変形し, ghost ring における Truncated operation, Frobenius operation を用いて計算することで導くことができる．

$F_r(\alpha), F_r(\beta)$ の値を事前に把握し, かつ $a_2 = b_2 = 1$ であれば, $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)([a,b])$ について Frobenius operation を用いた因数分解がなされていることになる．

この結果を (4.2) で用いるには necklace ring の元 $E_{Nr}(\lambda_t(\chi_1)(g_1)), E_{Nr}(\lambda_t(\chi_2)(g_2))$ を Frobenius operation で移した像を知る必要があるが, これについては次の命題が成り立つ．

Proposition 4.6. *G を有限群, χ を G の仮想指標とすると, 任意の自然数 k に対し $E_{Nr}(\lambda_t(\chi)(g^k)) = F_k \circ E_{Nr}(\lambda_t(\chi)(g))$ が成り立つ．*

証明は Frobenius operation と写像 ϕ の可換性から示せる．この命題においては χ が整数値指標であることを必要とはしない.

参考文献

[Bo] E. H. Boorman, S-operations in representation theory, Trans. Amer. Math. Soc. **205**(1975), 127–149

[Bry] J. M. Bryden, exterior power operations in the representation theory of the classical Weyl groups, Communications in Algebra **27**(12), 6273–6296(1999)

[Knu] D. Knutson, λ-Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group, Springer-Verlag, 1973

[Ku] 黒川 信重, 小山 信也, リーマン予想のこれまでとこれから, 日本評論社, 2009

[Met] N. Metropolis and Gian-Carlo Rota, Witt vectors and the Algebra of necklaces, Advances in mathematics **50**, 95–125 (1983)

[Os] A. Osse, λ-structure and representation rings of compact connect Lie groups, Journal of Pure and Applied Algebra 121(1997) 69–93

[Ta] 田村 朋之, 有限群の整数値指標である表現の交代テンソル積表現, 2014 年度表現論シンポジウム 講演集, 7–16

[Var] K. Varadarajan, K. Wehrhahn, Aperiodic Rings, Necklace Rings, and Witt Vectors, Advances in mathematics **81**, 1–29 (1990)

[Yau] D. Yau, Lambda-rings, World Scientific, 2010

Tomoyuki Tamura

Graduate School of Mathematics, Kyushu-University,

Nishi-ku Fukuoka, 819-0395, Japan.

E-mail: t-tamura@math.kyushu-u.ac.jp