

# 行列問題を用いた可換梯子型 パーシステントホモロジー群の直既約分解

竹内 博志 (Hiroshi Takeuchi) \*

共同研究者：Emerson Gaw Escolar，浅芝 秀人，平岡 裕章

## 概要

近年の位相的データ解析では，実データ解析の需要に応えるため，ジグザグパーシステント加群などの時系列位相的データ解析の手法が提案されてきた．本研究では，ジグザグパーシステント加群の直既約分解を前提として，現在ガラスのデータ解析に応用されている可換梯子型パーシステント加群の直既約分解を，行列問題を用いた新しい分解アルゴリズムによって達成した．

## 1 位相的データ解析及び本研究の背景

位相的データ解析では，有限個の点列で与えられるデータ  $P \subset \mathbb{R}^N$  に対して，その位相的性質を調べる問題がよく考えられる．例えば，センサーネットワークの被覆問題 [6] や材料科学における物性解析 [5] などに応用されている．もちろん  $P$  は有限集合であるから，単純にホモロジー群を考へても意味のある特徴抽出は行えない．そこで位相的データ解析では，有限点列からフィルトレーション付きの幾何モデル  $X = \{X_i: \text{有限単体複体もしくは位相空間} \mid X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n\}$  を構成し，その幾何モデルに対して体  $K$  係数  $q$  次ホモロジー関手  $H = H_q(-, K)$  を作用させることがよく行われる（有限点列から有限単体複体のフィルトレーションを構成する方法としては，アルファ複体や Vietoris-Rips 複体などがよく使われる [3]）:

$$H(X): H(X_1) \rightarrow H(X_2) \rightarrow \dots \rightarrow H(X_n) \quad (1)$$

(1) をパーシステントホモロジー群と呼ぶ．これは  $H(X_i)$  の元がフィルトレーション内を  $j$  進んだ  $H(X_{i+j})$  で存続しているかどうかを調べる事が出来，与えられた空間の堅牢 (robust) な位相不変量を抽出することが出来る．次の節で述べる籠 (quiver) の表現論を用いることで，この (加) 群は一意的に直既約分解することが出来，それによってパーシステント図などの扱いやすい表示を得ることが出来る．

また，この籠の表現論を用いて，パーシステントホモロジー群を様々な形式で一般化することが出来る．その中でも，本研究の研究対象である可換梯子型パーシステント加群は，時系列データの

\* 東北大学大学院理学研究科 (〒980-0845 仙台市青葉区荒巻青葉 6-3, E-mail: hiroshi.takeuchi.s6@dc.tohoku.ac.jp)

堅牢なホモロジー群を扱うことが出来る．例えば論文 [4] では可換梯子型パーシステント加群を用い，シリカガラス (SiO<sub>2</sub>) の加圧状態でのリング構造の保持性等が議論されており，今後この可換梯子型パーシステント加群を使ったデータ解析の発展が期待されている．この加群を扱いやすく表示するときも直既約分解する必要があるが，先行研究で得られている分解アルゴリズム [4] は扱いが困難で冗長である．本研究ではこの分解アルゴリズムを，行列の標準形を求める問題に置き換えることによって簡易化した．

## 2 籠の表現論

籠  $Q = (Q_0, Q_1)$  とは，頂点集合が  $Q_0$  で有向辺の集合が  $Q_1$  で与えられる有向グラフのことである．籠  $Q$  の頂点  $a \in Q_0$  から  $b \in Q_0$  への辺  $\alpha \in Q_1$  を  $\alpha: a \rightarrow b$  で表す．また頂点  $a$  から  $b$  への長さ  $\ell$  の道  $(a | \alpha_1 \dots \alpha_\ell | b)$  は， $\alpha_1$  の始点が  $a$  で  $\alpha_\ell$  の終点が  $b$ ，かつ  $\alpha_i$  の終点と  $\alpha_{i+1}$  の始点 ( $i = 1, \dots, \ell - 1$ ) が等しい  $\ell$  個の辺  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  から与えられる．このとき，籠  $Q$  に対して道代数  $KQ$  が， $Q$  内の全ての道で張られるベクトル空間に，道の合成

$$(a | \alpha_1 \dots \alpha_\ell | b)(c | \beta_1 \dots \beta_m | d) = \delta_{b,c}(a | \alpha_1 \dots \alpha_\ell \beta_1 \dots \beta_m | d)$$

( $\delta_{b,c}$  はクロネッカーのデルタ記号)

からなる積構造を入れたものとして定まる．ここでは有限 ( $|Q_0|, |Q_1| < \infty$ ) かつサイクル<sup>\*1</sup>を持たない籠のみを考える．また始点と終点が等しい道  $w_i$  の線形和

$$\rho = \sum_{i=1}^k c_i w_i, \quad c_i \in K$$

を  $Q$  の関係と呼び，関係の集まり  $\{\rho_1, \dots, \rho_s\}$  が道代数  $KQ$  に生成するイデアルを  $\langle \rho_1, \dots, \rho_s \rangle$  と書く．

籠  $Q$  の表現  $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  とは，各頂点  $a \in Q_0$  に有限次元ベクトル空間  $M_a$  を割り当て，各辺  $\alpha: a \rightarrow b$  に線形写像  $\varphi_\alpha: M_a \rightarrow M_b$  を割り当てたものである．またイデアル  $I = \langle \rho_1, \dots, \rho_s \rangle$  が定める代数  $A = KQ/I$  の表現  $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  は，籠  $Q$  の表現であって各関係  $\rho_j = \sum_i c_{ij} w_{ij}$  に対して  $\varphi_{\rho_j} = \sum_i c_{ij} \varphi_{w_{ij}} = 0$  を満たすもので与えられる<sup>\*2</sup>．ここで  $\varphi_w$  は道  $w = (a | \alpha_1 \dots \alpha_\ell | b)$  に対して線形写像の合成  $\varphi_w = \varphi_{\alpha_\ell} \circ \dots \circ \varphi_{\alpha_1}$  を意味する．例えば，次の籠

$$Q = \begin{array}{ccc} \overset{1'}{\circ} & \xrightarrow{\alpha} & \overset{2'}{\circ} \\ \beta \uparrow & & \delta \uparrow \\ \underset{1}{\circ} & \xrightarrow{\gamma} & \underset{2}{\circ} \end{array} \quad (2)$$

\*1 始点と終点が等しい道

\*2 定義より，イデアル  $I$  が  $\{0\}$  の場合は，籠の表現と代数の表現は同じものである．

の, 関係  $\rho = \gamma\delta - \beta\alpha$  が定める代数  $KQ/I$  の表現

$$M = \begin{array}{ccc} M_{1'} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_{2'} \\ \varphi_\beta \uparrow & & \varphi_\delta \uparrow \\ M_1 & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & M_2 \end{array} \quad (3)$$

においては  $\varphi_\delta\varphi_\gamma - \varphi_\alpha\varphi_\beta = 0$  が成り立ち, (3) が可換図式となる. このように代数の表現を可換図式とするような関係から定まるイデアルを可換関係イデアルと呼ぶことにする.

代数  $A = KQ/I$  の表現  $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  と  $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  の直和表現  $M \oplus M'$  とは, 各頂点  $a \in Q_0$  にベクトル空間  $M_a \oplus M'_a$  を割り当て, 各辺  $\alpha: a \rightarrow b$  に線形写像  $\varphi_\alpha \oplus \varphi'_\alpha: M_a \oplus M'_a \rightarrow M_b \oplus M'_b$  を割り当てたものである.

代数  $A = KQ/I$  の表現  $M$  は,  $M = N \oplus N'$  なる任意の直和分解に対して常に  $N = 0$  もしくは  $N' = 0$  となるとき直既約という. Krull-Schmidt の定理によると, 任意の表現  $M$  は直既約な表現の直和  $M \cong W_1 \oplus \dots \oplus W_s$  に同型を除いて一意に分解出来ることが知られている. 籠  $Q$  もしくは代数  $A$  は, 直既約表現の異なる同型類の個数が有限個であるとき有限型であるといい, そうでないとき無限型と呼ぶ.

$\mathbb{A}_n$  型の籠とは, 次のような  $n$  個の頂点が  $n-1$  個の辺で結ばれた有向グラフのことである:

$$\mathbb{A}_n(\tau_n): \circ \longleftrightarrow \circ \longleftarrow \dots \longleftarrow \circ$$

ここで,  $\longleftrightarrow$  は  $\longrightarrow$  もしくは  $\longleftarrow$  を表し, それぞれに記号  $f, b$  (forward と backward) を用意しておけば,  $\mathbb{A}_n$  型籠は  $f, b$  の  $n-1$  個の列  $\tau_n$  で表せる. Gabriel の定理 [7] によると,  $\mathbb{A}_n$  型籠の任意の表現

$$M: M_1 \longleftrightarrow M_2 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow M_n$$

は, 直既約な区間表現

$$I[b, d]: 0 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow 0 \xrightarrow{b \text{ 番目}} K \longleftarrow K \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow K \xleftarrow{d \text{ 番目}} 0 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow 0$$

( $K \longleftrightarrow K$  は全て恒等写像)

の直和

$$M \cong \bigoplus_{1 \leq b < d \leq n} I[b, d]^{m_{b,d}}, \quad (m_{b,d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{重複度}) \quad (4)$$

として同型を除いて一意に分解可能であることが知られている. パーシステントホモロジー群は,  $\mathbb{A}_n$  型籠の射の向きが全て揃った  $\tau_n = ff \dots f$  の特別な場合であり, 各区間表現は  $H(X_b)$  で発生し  $H(X_{d+1})$  で消滅するホモロジー群の生成元を意味している. パーシステントホモロジー群の一意分解 (4) から定まる多重集合

$$D_M = \{(b, d) \mid 1 \leq b < d \leq n, (b, d) \text{ は重複度 } m_{b,d} \text{ をもつ}\}$$

をパーシステント図と呼ぶ. この表示は視覚的にわかりやすく, パーシステントホモロジー群の応用においては頻繁に利用されている.

籠の表現論によって拡張されたパーシステントホモロジー群（パーシステント加群と呼ぶ）は，位相的データ解析の適用範囲を更に広げることになった．例えばタンパク質フォールディングのように，時系列データとして時刻  $t$  での位相空間  $Y_t$  の列  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$  が与えられている場合（例えば時刻  $t$  でのタンパク質の形を  $Y_t$  とする），これらは一般にはフィルトレーションを成さないが，

$$Y_1 \hookrightarrow Y_1 \cup Y_2 \hookrightarrow Y_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow Y_{T-1} \cup Y_T \hookrightarrow Y_T$$

（ $\hookrightarrow$  は包含写像）

が誘導するパーシステント加群

$$H(Y_1) \longrightarrow H(Y_1 \cup Y_2) \longleftarrow H(Y_2) \longrightarrow \dots \longrightarrow H(Y_{T-1} \cup Y_T) \longleftarrow H(Y_T) \quad (5)$$

を直既約分解することで，時系列  $Y_1, \dots, Y_T$  の中で存続する位相的特徴を抽出することが可能になる．

$\mathbb{A}_n$  型パーシステント加群をジグザグ（パーシステント）加群といい，論文 [2] をはじめとして様々な直既約分解アルゴリズムが与えられている．ジグザグ加群は時系列データを扱うことが出来る最も基本的なパーシステント加群なので，現在力を入れて発展が継続されている．

### 3 シリカガラスによる位相的データ解析への新たな話題提起

時系列データとして次のような例を考えてみよう．シリカガラス  $\text{SiO}_2$  の原子配置  $P \subset \mathbb{R}^3$  が与えられている．このガラスを圧縮変形させて新しい原子配置  $P' \subset \mathbb{R}^3$  を得た．この時，2つのシリカガラスに共通する幾何構造，即ちガラスの圧縮変形に対して不変な幾何構造を捉えたい．ジグザグパーシステント加群を考えると，この幾何構造を捉えることは出来るが，この手法は各空間におけるホモロジー群のパーシステンスを捉えてはいない．この時系列のパーシステンスと空間のパーシステンスを同時に捉える手法として考えられたのが，次の可換梯子（Commutative Ladder, CL）型パーシステント加群である．まず元の原子配置  $P$  に対して，2つの位相空間  $X_r = \bigcup_{p \in P} B_r(p)$ （ただし， $B_r(p)$  は点  $p$  を中心とした半径  $r$  の球体）， $X_s = \bigcup_{p \in P} B_s(p)$  をとり，新しい原子配置  $P'$  に対しても同様に2つの位相空間  $W_r = \bigcup_{p' \in P'} B_r(p')$ ， $W_s = \bigcup_{p' \in P'} B_s(p')$  をとると，次の可換図式が定まる．

$$\begin{array}{ccccc} H(X_s) & \longrightarrow & H(X_s \cup W_s) & \longleftarrow & H(W_s) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H(X_r) & \longrightarrow & H(X_r \cup W_r) & \longleftarrow & H(W_r) \end{array}$$

この図式を CL 型パーシステント加群と呼び，縦方向はフィルターの数が2のパーシステントホモロジー群になっており，横方向は時系列データの数が2のジグザグ加群になっている．従ってこの新しいパーシステント加群は，時系列データに共通する幾何構造を考えつつ，その幾何構造の堅牢性・パーシステンスを考えることが出来る．

## 4 可換梯子 (CL) 型パーシステント加群

CL 型パーシステント加群は一般に次のように定義される .

定義. 上段と下段で同じ横方向の向き付け  $\tau_n$  を与えた籠

$$L(\tau_n) = \begin{array}{ccccccc} \circ & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \circ \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ \circ & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & \circ \end{array}$$

を可換関係イデアル  $I$  で割った代数  $CL(\tau_n) = KL(\tau_n)/I$  を長さ  $n$  の可換梯子と呼ぶ . そしてこの代数  $CL(\tau_n)$  の表現

$$M = \begin{array}{ccccccc} M_{1'} & \xleftarrow{h_{1'}} & M_{2'} & \xleftarrow{h_{2'}} & M_{3'} & \xleftarrow{h_{3'}} & \cdots & \xleftarrow{\phantom{h}} & M_{n-1'} & \xleftarrow{h_{n-1'}} & M_{n'} \\ \varphi_1 \uparrow & \circlearrowleft & \varphi_2 \uparrow & \circlearrowleft & \varphi_3 \uparrow & & & & \varphi_{n-1} \uparrow & \circlearrowleft & \varphi_n \uparrow \\ M_1 & \xleftarrow{h_1} & M_2 & \xleftarrow{h_2} & M_3 & \xleftarrow{h_3} & \cdots & \xleftarrow{\phantom{h}} & M_{n-1} & \xleftarrow{h_{n-1}} & M_n \end{array} \quad (6)$$

を長さ  $n$  の CL 型パーシステント加群と呼ぶ .

[4] では ,  $CL(\tau_n)$  は  $n \leq 4$  のとき向きづけ  $\tau_n$  に依らず常に有限型となり ,  $n > 4$  では一般には無限型となることが示されており , Auslander-Reiten 籠を用い , パーシステント図を Auslander-Reiten 籠の頂点集合上の関数として一般化出来ることが示されている . ここで一般に , 代数  $A$  に対してその Auslander-Reiten 籠とは , 頂点集合  $\Gamma_0$  を全ての直既約表現の同型類で与え , また同型類  $[M], [N] \in \Gamma_0$  に対して既約射  ${}^*3M \rightarrow N$  が存在するとき  $\Gamma_1$  内の辺  $[M] \rightarrow [N]$  を対応させた籠  $\Gamma(A) = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  のことである . 長さ  $n \leq 4$  の可換梯子に対する Auslander-Reiten 籠は論文 [4] に全てリストアップされている . 図 1 には一例として , [4] でシリカの解析に使われた CL 型パーシステント加群  $CL(fb)$

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \longrightarrow & \circ & \longleftarrow & \circ \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \circ & \longrightarrow & \circ & \longleftarrow & \circ \end{array} \quad (7)$$

の場合の Auslander-Reiten 籠を載せている . ここで各頂点に位置する既約な同型類  $[I]$  は次元ベクトル  $\dim I$  を用いて表示しており , 例えば既約表現

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & K \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & K & \longleftarrow & K \end{array}$$

の次元ベクトルは  $\begin{smallmatrix} 101 \\ 111 \end{smallmatrix}$  で表している .

\*3 次の 2 つの条件を満たすとき  $f: M \rightarrow N$  を既約射という : (i)  $f$  はレトラクションでも切断でもない . (ii) 任意の分解  $f = f_1 \circ f_2$  に対して ,  $f_1$  はレトラクションもしくは  $f_2$  は切断になる .

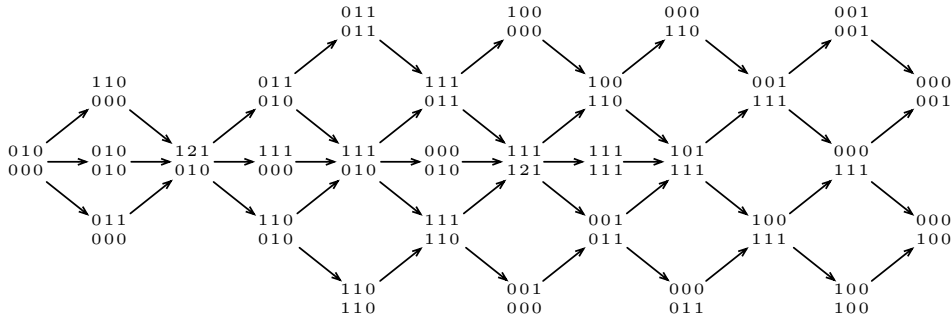


図1  $CL(fb)$  の Auslander-Reiten 籠

よって有限型の可換梯子  $CL(\tau_n)$  の Auslander-Reiten 籠を  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  で表すと,  $CL(\tau_n)$  の任意の表現  $M$  は, 頂点集合  $\Gamma_0$  で与えられる直既約表現を用いて一意に分解

$$M \cong \bigoplus_{[I] \in \Gamma_0} I^{k_{[I]}}, \quad (k_{[I]} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{重複度})$$

される.

## 5 主結果

本研究では, CL 型パーシステント加群を行列で表示することによって, 有限型の CL 型パーシステント加群 (6) の直既約分解アルゴリズムを簡略化した.

一般に, 籠  $Q$  の表現  $V = (V_a, f_\alpha)$  と  $W = (W_a, g_\alpha)$  の間の射  $\phi = \{\phi_a: V_a \rightarrow W_a\}_{a \in Q_0}: V \rightarrow W$  を

$$\begin{array}{ccc} W_a & \xrightarrow{g_\alpha} & W_b \\ \phi_a \uparrow & \circlearrowleft & \phi_b \uparrow \\ V_a & \xrightarrow{f_\alpha} & V_b \end{array} \quad (\forall \alpha: a \rightarrow b \in Q_1) \quad (8)$$

を満たすものと定めると,  $Q$  の表現全体を対象とした表現の圏  $\text{rep}(Q)$  が定義される.

更に, 圏  $\text{rep}(Q)$  の射全体を対象とする圏  $\text{Arr}(\text{rep}(Q))$  を考えることが出来る. この新たな圏  $\text{Arr}(\text{rep}(Q))$  の射は対象  $\phi_1: V_1 \rightarrow W_1$  と  $\phi_2: V_2 \rightarrow W_2$  に対し,

$$\psi = (\psi_V, \psi_W): \phi_1 \rightarrow \phi_2, \quad \begin{array}{ccc} V_2 & \xrightarrow{\phi_2} & W_2 \\ \psi_V \uparrow & \circlearrowleft & \psi_W \uparrow \\ V_1 & \xrightarrow{\phi_1} & W_1 \end{array} \quad (9)$$

と定める.

以上の一般論は籠  $Q$  を代数  $KQ/I$  に取り替えても成り立つ. このようにして定まる圏  $\text{rep}(CL(\tau_n))$  と  $\text{Arr}(\mathbb{A}_n(\tau_n))$  の間には圏同型  $F: \text{rep}(CL(\tau_n)) \cong \text{Arr}(\mathbb{A}_n(\tau_n))$  が自然に定まるので, CL 型パーシステント加群を圏  $\mathbb{A}_n(\tau_n)$  の射として扱うことが出来る. 即ち,  $M \in \text{rep}(CL(\tau_n))$  の直



この場合，(14) の表記は一般に以下のように書ける．

$$\Phi = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1:1 & 1:2 & 2:2 & 1:3 & 2:3 & 3:3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1:1 \\ 1:2 \\ 2:2 \\ 1:3 \\ 2:3 \\ 3:3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} F_{1:1}^{1:1} f_{1:1}^{1:1} & F_{1:2}^{1:1} f_{1:2}^{1:1} & 0 & F_{1:3}^{1:1} f_{1:3}^{1:1} & 0 & 0 \\ 0 & F_{1:2}^{1:2} f_{1:2}^{1:2} & F_{2:2}^{1:2} f_{2:2}^{1:2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{2:2}^{2:2} f_{2:2}^{2:2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{1:2}^{1:3} f_{1:2}^{1:3} & F_{2:2}^{1:3} f_{2:2}^{1:3} & F_{1:3}^{1:3} f_{1:3}^{1:3} & F_{2:3}^{1:3} f_{2:3}^{1:3} & 0 \\ 0 & 0 & F_{2:2}^{2:3} f_{2:2}^{2:3} & 0 & F_{2:3}^{2:3} f_{2:3}^{2:3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{1:3}^{3:3} f_{1:3}^{3:3} & F_{2:3}^{3:3} f_{2:3}^{3:3} & F_{3:3}^{3:3} f_{3:3}^{3:3} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (16)$$

ここで，0 となっている成分は全て  $\dim_K \text{Hom}_{K\mathbb{A}_n(\tau_n)}(a:b, c:d) = 0$  を満たすことが確かめられる．  
例えば  $\varphi: 1:1 \rightarrow 1:2$  は，

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\text{id}_K} & K & \longleftarrow & 0 \\ \varphi_1 \uparrow & & \varphi_2 \uparrow & & \varphi_3 \uparrow \\ K & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad (17)$$

である．明らかに  $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$  であり，また図式の可換性より， $\varphi_1 = 0$  でなくてはならない．従って  $\varphi = 0$  となる．

以下  $f_{a:b}^{c:d}$  は省略する．

圏  $\text{rep}(\mathbb{A}_n(\tau_n))$  の同型射も，行列の表記では  $\Phi$  と同様に，特定の成分が必ず 0 になるという制限を受ける．行列  $\Phi$  の列の基本変形は，圏  $\text{rep}(\mathbb{A}_n(\tau_n))$  の同型射によって与えられる行列

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1:1 & 1:2 & 2:2 & 1:3 & 2:3 & 3:3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1:1 \\ 1:2 \\ 2:2 \\ 1:3 \\ 2:3 \\ 3:3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} R_{1:1}^{1:1} & R_{1:2}^{1:1} & 0 & R_{1:3}^{1:1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1:2}^{1:2} & R_{2:2}^{1:2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{2:2}^{2:2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{1:2}^{1:3} & R_{2:2}^{1:3} & R_{1:3}^{1:3} & R_{2:3}^{1:3} & 0 \\ 0 & 0 & R_{2:2}^{2:3} & 0 & R_{2:3}^{2:3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{1:3}^{3:3} & R_{2:3}^{3:3} & R_{3:3}^{3:3} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (18)$$

を  $\Phi$  に右から掛けることによって実行される．例えば  $\Phi R$  の  $(2:2, 1:2)$  成分は  $(F_{1:2}^{1:2} R_{2:2}^{1:2} + F_{2:2}^{1:2} R_{2:2}^{2:2})$  なので， $R$  を適当に取れば  $(F_{1:2}^{1:2})$  の成分を  $(F_{2:2}^{1:2})$  の成分に足すことが出来る．しかし逆に， $\Phi R$  の  $(1:2, 1:2)$  成分は  $(F_{1:2}^{1:2} R_{1:2}^{1:2})$  なので， $(F_{2:2}^{1:2})$  の成分を  $(F_{1:2}^{1:2})$  の成分に足すことは出来ない．行の基本変形も同様の制限を受ける．

本研究ではこの制限された基本変形を用い，全ての小行列  $F_{a:b}^{c:d}$  を標準形

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (E \text{ は単位行列}) \quad (19)$$



に変換する擬似コードを作成した．この最終的な出力が CL 型の直既約成分を与えることは，Auslander-Reiten 箆 ( $CL(fb)$ ) の場合は図 15) で確認出来る．

## 6 まとめ

本研究では，CL 型パーシステント加群を行列の形に置き換えることにより，従来より簡便な直既約分解のアルゴリズムを構成した．またこのアルゴリズムはジグザグ加群の直既約分解を仮定しているので，ジグザグ加群の直既約分解アルゴリズムが改良されると，このアルゴリズムも自動的に改良される利点がある．更にこの擬似コードは容易に並列化出来るので，クラスターマシンによるビッグデータの解析に適している．

## 参考文献

- [1] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press. (2006).
- [2] G. Carlsson, V. de Silva. Zigzag Persistence. *Found. Comput. Math.* 10, 367–405 (2010).
- [3] H. Edelsbrunner and J. L. Harer. Computational Topology. AMS. (2009).
- [4] E. Escolar and Y. Hiraoka. Computing persistence modules on commutative ladders of finite type. *Lecture Notes in Computer Science* 8592, 144–151. (2014).
- [5] M. Gameiro, Y. Hiraoka, S. Izumi, M. Kramar, K. Mischaikow, and V. Nanda. Topological Measurement of Protein Compressibility via Persistent Diagrams. *Japan J. Indust. Appl. Math.*. Vol. 32 1–17. (2015).
- [6] Y. Hiraoka and G. Kusano. Coverage Criterion in Sensor Networks Stable under Perturbation. arXiv:1409.7483.
- [7] 草場公邦．行列特論．裳華房．(1979).