Ricci ソリトンとその種々の一般化について

只野　誉 (Homare TADANO)*

概　要

In this note, stimulated by M. Fernández-López and E. García-Río, we shall give an upper diameter bound for compact shrinking Ricci solitons in terms of the range of the scalar curvature. As an application, we shall provide a new sufficient condition for four-dimensional compact shrinking Ricci solitons to satisfy the Hitchin–Thorpe inequality. We shall also consider some generalizations of Ricci solitons and give corresponding theorems.

1. Ricci ソリトン

近年, Ricci フローは多様体上の標準的計量の構成において大きな成功を収め, 微分幾何学における主要な道具としてその地位を確立した. Ricci ソリトンは Hamilton [19] によって導入され, Perelman [29, 30, 31] による Poincaré 予想の証明において重要な役割を果たした. Ricci ソリトンは Ricci フローの自己相似解に対応する点で重要な研究対象であり, 理論物理学における超弦理論の文脈からも活発に調べられている [14].

Definition 1.1. 滑らかな完備 Riemann 多様体 (M, g) が **Ricci ソリトン** であるとは, M 上の滑らかなベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g \tag{1.2}$$

が成り立つときにいう. ここで Ric_g は (M, g) 上の Ricci 曲率テンソルであり, $\mathcal{L}_X$ はベクトル場 X による Lie 微分を表す. X が Killing ベクトル場なら, Ricci ソリトンは Einstein 多様体である. この場合, Ricci ソリトンは **自明** であるという. Ricci ソリトン (M, g) は $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$ のとき, 其々 **shrinking**, **steady**, **expanding** であるという. もし, X が M 上の滑らかな函数 $f : M \to \mathbb{R}$ の勾配ベクトル場を用いて $X = \nabla f$ と書けるならば, Ricci ソリトンは **勾配 Ricci ソリトン** であるという. f をベクトル場 X のポテンシャル函数という. このとき Ricci ソリトンの式 (1.2) は

$$\mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f = \lambda g \tag{1.3}$$

と書ける. ここで $\mathrm{Hess}\, f$ は $f : M \to \mathbb{R}$ のヘッシアンを表す. ポテンシャル函数 f が定数ならば勾配 Ricci ソリトン (M, g) は自明である.

Example 1.4. 勾配 Ricci ソリトンの典型例は標準的平坦計量を備えた Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ であり, **Gaussian ソリトン** と呼ばれる. ここで函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はノルムを用いて $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2$ で与えられる. これは非コンパクトな shrinking Ricci ソリトンである.

第 12 回 数学総合若手研究集会 (2016 年 2 月 29 日–2016 年 3 月 3 日, 於 北海道大学) 報告集
2010 Mathematics Subject Classification: Primary 53C21, Secondary 53C20, 53C25
キーワード：Ricci フロー, Ricci ソリトン, Ricci almost ソリトン, Quasi–Einstein 多様体, 直径評価, Myers の定理, Hitchin–Thorpe 不等式
* 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1 番 1 号 大阪大学大学院理学研究科
e-mail: h-tadano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

一方, コンパクト多様体上の非自明な Ricci ソリトンは4次元以上の shrinking 勾配 Ricci ソリトンであることが知られており [7], その具体例は (M, g) が Kähler 多様体の場合に小磯 [22], Cao [6], Wang-Zhu [43] らが構成している. Ricci ソリトン (M, g) が与えられると, 時間 t に依存するベクトル場 $Y_t := -\frac{1}{2\lambda t}X$ により生成されるフロー φ_t で g を引き戻して得られる M 上の Riemann 計量 $g(t) = -2\lambda t \varphi_t^* g$ は **Ricci フロー**

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}$$

の解になる. Ricci ソリトンは Ricci フローの自己相似解に対応し, このフローの特異点モデルとして現れるだけでなく, Li–Yau–Hamilton 不等式の研究においても重要な役割を演じる [7, 10, 20]. Perelman [29, 30, 31] による Poincaré 予想の解決において Ricci ソリトンが中心的な役割を果たして以降, 多くの数学者の注目を集めている.

2. コンパクト性と直径評価

本稿を通して全ての多様体は連結で滑らかであり, 境界を持たないと仮定する. 完備 Riemann 多様体に対してそのコンパクト性や直径を調べることは基本的な問題の一つであり, 次の Myers の定理が有名である：

Theorem 2.1 (Myers [28])**.** *Let (M, g) be an n-dimensional complete Riemannian manifold. If there exists some positive constant $\lambda > 0$ such that $\mathrm{Ric}_g \geqslant \lambda g$, then (M, g) is compact with finite fundamental group. Moreover,*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}}.$$

また, コンパクト性に関しては次の Ambrose の定理がよく知られている：

Theorem 2.2 (Ambrose [1])**.** *Let (M, g) be a complete Riemannian manifold. Suppose that there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma : [0, \infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^\infty \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))ds = +\infty.$$

Then (M, g) is compact.

完備 Riemann 多様体 (M, g) と M 上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\mathrm{Ric}_X := \mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g, \quad \mathrm{Ric}_f := \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f$$

とおき, これらを Bakry–Émery Ricci 曲率と呼ぶ. Ricci ソリトンは Einstein 多様体の一般化であるから Myers の定理のような基本的な性質が Ricci ソリトンに対して拡張出来ないか考えることは自然である. 然し乍ら Bakry–Émery Ricci 曲率の正値性は Ricci ソリトンのコンパクト性を導かない. 実際, Example 1.4 で挙げた Gaussian ソリトンは shrinking であるが非コンパクトである. Shrinking Ricci ソリトンのコンパクト性はそのベクトル場のノルムの有界性によって特徴付けられる. 実際, 次が成り立つ：

Theorem 2.3 (Fernández-López and García-Río [12])**.** *Let (M, g) be a complete Riemannian manifold satisfying $\mathrm{Ric}_X \geqslant \lambda g$ for some vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ and positive constant $\lambda > 0$. Then M is compact if and only if $|X|$ is bounded on M.*

一方, Theorem 2.2 の一般化として次が成り立つ：

Theorem 2.4 ([37]). *Let* (M, g) *be a complete Riemannian manifold. Suppose that there exists some point* $p \in M$ *for which every geodesic* $\gamma : [0, \infty) \to M$ *emanating from* p *satisfies*

$$\int_0^\infty \mathrm{Ric}_X(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))ds = +\infty$$

and $|X| \leqslant C$ *for some non-negative constant* $C \geqslant 0$*. Then* (M, g) *is compact.*

Remark 2.5. Theorem 2.4 はベクトル場 X が勾配ベクトル場の場合に Zhang [45] によって示されている. Theorem 2.3 は Theorem 2.4 から直ちに従う.

Bakry–Émery Ricci 曲率が正値の場合, 対応するベクトル場のポテンシャル函数が有界であるか又はベクトル場のノルムが有界であれば, 次の Myers 型の定理が成り立つ：

Theorem 2.6 (Wei–Wylie [44]). *Let* (M, g) *be an* n*-dimensional complete Riemannian manifold satisfying* $\mathrm{Ric}_f \geqslant \lambda g$ *for some positive constant* $\lambda > 0$*. If* $|f| \leqslant k$ *for some non-negative constant* $k \geqslant 0$*, then* (M, g) *is compact. Moreover,*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}} + \frac{4k}{\sqrt{(n-1)\lambda}}. \tag{2.7}$$

Theorem 2.8 (Limoncu [24]). *Let* (M, g) *be an* n*-dimensional complete Riemannian manifold satisfying* $\mathrm{Ric}_X \geqslant \lambda g$ *for some positive constant* $\lambda > 0$*. If* $|X| \leqslant k$ *for some non-negative constant* $k \geqslant 0$*, then* (M, g) *is compact. Moreover,*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{k}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{k^2}{2} + (n-1)\lambda}\right). \tag{2.9}$$

Remark 2.10. Theorem 2.6 及び 2.8 において $k = 0$ とすれば, これらは Theorem 2.1 に帰着される. 最近, Limoncu [25, 24] の議論を修正することで (2.7), (2.9) を改良した直径評価が其々 [35, 36] で与えられた.

近年, 多くの数学者が Ricci ソリトンに対する直径評価を与えている. 特に, 非自明なコンパクト Ricci ソリトンに対する下からの一様な直径評価は Witten ラプラシアンの第一固有値の下界評価との関連で二木–佐野 [16] によって与えられ, その後, Andrews–Ni [2], Chu–Hu [11], 二木–Li–Li [15] らによって改良された：

Theorem 2.11 (Futaki–Li–Li [15]). *Let* (M, g) *be an* n*-dimensional non-trivial compact shrinking Ricci soliton satisfying* (1.3)*. Then*

$$\mathrm{diam}(M, g) \geqslant \frac{2(\sqrt{2}-1)\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

一方, Fernández-López と García-Río [13] はコンパクト Ricci ソリトンに対する下からの直径評価を Ricci 曲率とスカラー曲率を用いて与えた：

Theorem 2.12 (Fernández-López and García-Río [13]). *Let* (M, g) *be an* n*-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying* (1.3)*. Then*

$$\mathrm{diam}(M, g) \geqslant \max\left\{\sqrt{\frac{R_{\max} - n\lambda}{\lambda(C-\lambda)}}, \sqrt{\frac{R_{\max} - n\lambda}{\lambda(\lambda - c)}}, 2\sqrt{\frac{R_{\max} - n\lambda}{\lambda(C-c)}}\right\}.$$

但し, 本稿を通して

$$C := \max_{v\in TM}\{\mathrm{Ric}_g(v,v) : |v| = 1\}, \quad c := \min_{v\in TM}\{\mathrm{Ric}_g(v,v) : |v| = 1\}$$

は其々 (M, g) の単位球束上の Ricci テンソルの最大値及び最小値を表し,

$$R_{\max} = \max_M R, \quad R_{\min} = \min_M R$$

は其々スカラー曲率 R の M 上の最大値及び最小値を表す. 定義から $cg \leqslant \mathrm{Ric}_g \leqslant Cg$ が成り立つ. Theorem 2.6 を受けて Fernández-López と García-Río [13] はコンパクト Ricci ソリトンの上からの直径評価はスカラー曲率の振幅を用いて与えられるだろうと予想した. 次の直径評価はこの予想に対する肯定的な答えを与える：

Theorem 2.13 ([36])**.** *Let* (M, g) *be an* n*-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying* (1.3). *Then*

$$\mathrm{diam}(M,g) \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(2\sqrt{R_{\max} - R_{\min}} + \sqrt{4(R_{\max} - R_{\min}) + (n-1)\lambda\pi^2}\right). \tag{2.14}$$

Remark 2.15. Theorem 2.13 において Ricci ソリトンが定スカラー曲率を持てば, Ricci ソリトンは Einstein 多様体になり, 直径評価 (2.14) は Myers [28] によって示された正の Einstein 定数を持つ Einstein 多様体に対する直径評価に帰着される.

3. Hitchin–Thorpe 不等式への応用

Hitchin [21] と Thorpe [39] は 4 次元コンパクト多様体 (M, g) が Einstein 計量を許容すれば, M の Euler 数 $\chi(M)$ と符合 $\tau(M)$ は不等式

$$2\chi(M) \geqslant 3|\tau(M)| \tag{3.1}$$

を満たすことを示した. 言い換えれば, この不等式を満たさぬ 4 次元コンパクト多様体は Einstein 計量を許容しない. (3.1) を Hitchin–Thorpe 不等式という. (3.1) は Einstein 計量の存在に対する障害を与えるが, 逆に (3.1) を満たすにも拘らず Einstein 計量を許容しない無限個の 4 次元多様体が LeBrun [23] によって構成されている.

Ricci ソリトンは Einstein 多様体の自然な一般化であるから, 4 次元コンパクト Ricci ソリトンの存在に対する障害が予想される. Ma [26] はスカラー曲率に関する条件の下で 4 次元コンパクト Ricci ソリトンに対する Hitchin–Thorpe 不等式を示した：

Theorem 3.2 (Ma [26])**.** *Let* (M, g) *be a four-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying* (1.3). *If the scalar curvature* R *satisfies*

$$\int_M R^2 \leqslant 24\lambda^2 \mathrm{vol}(M,g), \tag{3.3}$$

then the soliton (M, g) *satisfies the Hitchin-Thorpe inequality* $2\chi(M) \geqslant 3|\tau(M)|$.

また, Fernández-López と García-Río [13] は Theorem 2.12 を応用して, コンパクト Ricci ソリトンに対する $\underline{\text{上から}}$ の直径評価を仮定することで同様の十分条件を与えた：

Theorem 3.4 (Fernández-López and García-Río [13]). *Let* (M, g) *be a four-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying* (1.3). *If*

$$\operatorname{diam}(M, g) \leqslant \max\left\{\sqrt{\frac{2}{C-\lambda}}, \sqrt{\frac{2}{\lambda-c}}, 2\sqrt{\frac{2}{C-c}}\right\},$$

then the soliton satisfies the Hitchin–Thorpe inequality $2\chi(M) \geqslant 3|\tau(M)|$.

一方, Theorem 2.13 を応用して, コンパクト Ricci ソリトンに対する 下から の直径評価を仮定することで新たな十分条件を与えることが出来る：

Theorem 3.5 ([36]). *Let* (M, g) *be a four-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying* (1.3). *If*

$$\sqrt{\frac{R_{\max}-R_{\min}}{\lambda^2}(16+6\pi^2)} \leqslant \operatorname{diam}(M, g), \tag{3.6}$$

then the soliton satisfies the Hitchin–Thorpe inequality $2\chi(M) \geqslant 3|\tau(M)|$.

Remark 3.7. Theorem 3.5 において Ricci ソリトンが定スカラー曲率を持てば, Ricci ソリトンは Einstein 多様体になり (3.6) は自動的に満たされ, Hitchin [21] と Thorpe [39] によって示された Einstein 多様体に対する Hitchin–Thorpe 不等式に帰着される.

4. 種々の一般化

近年の Ricci フロー及び Ricci ソリトンの発展を背景に, 多くの数学者がそれらの一般化を考えている. この章では, それらの一般化のうち Ricci almost ソリトンと quasi–Einstein 多様体に焦点を当てる.

4.1. Ricci almost ソリトン

Ricci almost ソリトンは Pigola–Rigoli–Rimoldi–Setti [32] によって導入された.

Definition 4.1. 滑らかな完備 Riemann 多様体 (M, g) が **Ricci almost ソリトン** であるとは, M 上の滑らかなベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と函数 $\lambda \in C^\infty(M)$ が存在して

$$\operatorname{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g \tag{4.2}$$

が成り立つときにいう. X が Killing ベクトル場で $\dim M \geqslant 3$ なら, Ricci almost ソリトンは Einstein 多様体である. この場合, Ricci almost ソリトンは **自明** であるという. Ricci almost ソリトン (M, g) は $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$ のとき, 其々 **shrinking**, **steady**, **expanding** であるという. もし, X が M 上の滑らかな函数 $f : M \to \mathbb{R}$ の勾配ベクトル場を用いて $X = \nabla f$ と書けるならば, Ricci almost ソリトンは **勾配 Ricci almost ソリトン** であるという. f をベクトル場 X のポテンシャル函数という. このとき Ricci almost ソリトンの式 (4.2) は次の式に帰着される：

$$\operatorname{Ric}_g + \operatorname{Hess} f = \lambda g. \tag{4.3}$$

全ての奇数次元単位球面は非自明な勾配 Ricci almost ソリトンの構造を許容することが知られている [17]. 函数 $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(M)$ が定数ならば, Ricci almost ソリトンは Ricci ソリトンである. 近年, 多くの数学者が Ricci ソリトンに対応する理論を Ricci almost ソリトンに対して拡張している. 例えば, Perelman の結果 [29] からコンパクト多様体上の Ricci ソリトンは勾配 Ricci ソリトンであるが, Barros–Batista–Ribeiro Jr. [4] はコンパクト多様体上の Ricci slmost ソリトンが定スカラー曲率を持てば, 勾配 Ricci almost ソリトンになることを示した. 一方, Sharma の結果 [34] によって完備 K-接触多様体上の勾配 Ricci ソリトンは佐々木–Einstein 多様体になるが, Ghosh [17] はコンパクト K-接触多様体上の勾配 Ricci almost ソリトンは単位球面に等長同型な佐々木多様体になることを示した. なお, Kähler 多様体上の勾配 Ricci almost ソリトンは勾配 Ricci ソリトンであることが知られている [27]. Ricci almost ソリトンは Ricci ソリトンの自然な一般化であるから, Ricci ソリトンの場合と同様に 4 次元コンパクト Ricci ソリトンの存在に対する障害が予想される. Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5] は次を示した：

Theorem 4.4 (Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5])**.** *Let (M, g) be a four-dimensional compact gradient Ricci almost soliton with positive scalar curvature satisfying* (4.3)*. If the scalar curvature satisfies*

$$\int_M R^2 d\mu \leqslant 6 \int_M \lambda R d\mu,$$

then the soliton (M, g) satisfies the Hitchin–Thorpe inequality $2\chi(M) \geqslant 3|\tau(M)|$.

Chen の結果 [9] により, 完備 Riemann 多様体上の shrinking Ricci ソリトンのスカラー曲率は非負であるから, Ricci almost ソリトンが Ricci ソリトンに帰着されるとき, Theorem 4.4 は Ma [26] による Theorem 3.2 に一致する.

Riemann 幾何学における最も重要な問題の一つは, Riemann 多様体がどのような条件下で球面に等長同型か調べることである. Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5] は 4 次元のコンパクト勾配 Ricci almost ソリトンが $\mathbb{S}^4$ と等長同型であるための十分条件を与えた：

Theorem 4.5 (Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5])**.** *Let (M, g) be a four-dimensional compact gradient Ricci almost soliton with positive scalar curvature satisfying* (4.3)*. If the scalar curvature satisfies*

$$\int_M R^2 d\mu \leqslant 6 \int_M \lambda R d\mu - 192\pi^2,$$

then the soliton is isometric to the standard sphere $\mathbb{S}^4$.

特に Ricci almost ソリトンが Ricci ソリトンに帰着されるとき, Theorem 4.5 は 4 次元のコンパクト Ricci ソリトンが $\mathbb{S}^4$ と等長同型であるための十分条件を与える：

Theorem 4.6 (Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5])**.** *Let (M, g) be a four-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying* (1.3)*. If the scalar curvature satisfies*

$$\int_M R^2 d\mu \leqslant 24\lambda^2 \mathrm{vol}(M, g) - 192\pi^2, \tag{4.7}$$

then the soliton is isometric to the standard sphere $\mathbb{S}^4$.

次に, Ricci ソリトンの別の一般化として Case–Shu–Wei [8] が導入した quasi–Einstein 多様体について述べる.

4.2. Quasi–Einstein 多様体

完備 Riemann 多様体 (M, g) 上のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ と函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ に対して

$$\mathrm{Ric}_X^m := \mathrm{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m} X^* \otimes X^* \quad \mathrm{Ric}_f^m := \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f - \frac{1}{m} df \otimes df$$

とおき, これらを m–Bakry–Émery Ricci 曲率と呼ぶ. ここで X^* は X の双対である.

Definition 4.8. 滑らかな完備 Riemann 多様体 (M, g) が **quasi–Einstein 多様体** であるとは, M 上の滑らかな函数 $f : M \to \mathbb{R}$ と $0 < m \leqslant \infty$ が存在して

$$\mathrm{Ric}_f^m = \lambda g \tag{4.9}$$

が成り立つときにいう. f が定数函数なら, quasi–Einstein 多様体は Einstein 多様体である. この場合, quasi–Einstein 多様体は **自明** であるという. $m = \infty$ なら, quasi–Einstein 多様体は Ricci ソリトンである. Quasi–Einstein 多様体 (M, g) は $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$ のとき, 其々 **shrinking**, **steady**, **expanding** であるという.

Quasi–Einstein 多様体は Riemann 多様体の直積上に Einstein 計量を構成する上で重要な役割を果たす. 実際, 任意次元の Riemann 多様体 (M, g) と m 次元の Riemann 多様体 (N, h) に対してその直積

$$(M \times N, \bar{g}) := \left(M \times N, g \oplus \exp\left(-\frac{2f}{m}\right) h\right)$$

が Einstein 多様体になるのは (M, g) が (4.9) を満たす quasi–Einstein 多様体でありかつ (N, h) が Einstein 多様体であるときに限る [3]. Quasi–Einstein 多様体の具体例は Wang [41] が構成している. Ricci almost ソリトンと同様に多くの数学者が quasi–Einstein 多様体の性質を調べている. 例えば, Ricci ソリトンと同様にコンパクト多様体上の steady または expanding な quasi–Einstein 多様体は自明である [40]. また, 3 次元以下の shrinking Ricci ソリトンは自明であるが, 2 次元の shrinking quasi–Einstein 多様体は自明である [8]. 完備 K-接触多様体上の勾配 Ricci ソリトンは佐々木–Einstein 多様体になるが, 同様の事実は完備 K-接触多様体上の quasi–Einstein 多様体に対しても成り立つ [18]. なお, Kähler 多様体上の quasi–Einstein 多様体は自明である [8].

m–Bakry–Émery Ricci 曲率に対応して, 次の Myers–Ambrose 型の定理が成り立つ：

Theorem 4.10 (Limoncu [24]). *Let (M, g) be an n-dimensional complete Riemannian manifold satisfying $\mathrm{Ric}_X^m \geqslant \lambda g$ for some positive constant $\lambda > 0$, where $m \in (0, \infty)$. Then (M, g) is compact. Moreover,*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n - 1 + m}.$$

Remark 4.11. Theorem 4.10 はベクトル場 X が勾配ベクトル場の場合に Qian [33] によって示されている.

Theorem 4.12 ([37]). *Let (M, g) be a complete Riemannian manifold. Suppose that there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma : [0, \infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^\infty \mathrm{Ric}_X^m(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) ds = +\infty,$$

where $m \in (0, \infty)$. Then (M, g) is compact.

Theorem 2.12 で与えられたコンパクトな Ricci ソリトンに対する下からの直径評価を quasi–Einstein 多様体に拡張することで, コンパクトな quasi–Einstein 多様体に対する下からの直径評価を与えることが出来る：

Theorem 4.13 ([38])**.** *Let (M,g) be an n-dimensional non-trivial compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying* (4.9) *with finite $m>1$. Then*

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}^2(M,g) \geqslant \max\Bigg\{ & \frac{m(m-1)}{(m-1)(\lambda-c)+R_{\max}-R_{\min}}\log\left(\frac{R_{\max}+(m-n)\lambda}{m\lambda}\right), \\ & \frac{m}{C-\lambda}\log\left(\frac{R_{\max}+(m-n)\lambda}{m\lambda}\right), \\ & \frac{4m(m-1)}{(m-1)(C-c)+R_{\max}-R_{\min}}\log\left(\frac{R_{\max}+(m-n)\lambda}{m\lambda}\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

一方, コンパクトな quasi–Einstein 多様体に対する下からの一様な直径評価は Wang [42] によって与えられた：

Theorem 4.14 (Wang [42])**.** *Let (M,g) be an n-dimensional non-trivial compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying* (4.9) *with finite $m\geqslant 1$. Then*

$$\operatorname{diam}(M,g) \geqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{4.15}$$

Theorem 4.14 は非自明な quasi–Einstein 多様体と Einstein 多様体の間に間隙定理を与える. 実際, コンパクトな quasi–Einstein 多様体が (4.15) を満たさなければ, このような多様体は Einstein 多様体でなければならない. 一方, Theorem 4.13 を用いることで, quasi–Einstein 多様体に対する次の間隙定理を与えることが出来る：

Theorem 4.16 ([38])**.** *Let (M,g) be an n-dimensional compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying* (4.9) *with finite $m>1$. Then (M,g) is trivial if and only if the one of the following conditions holds:*

(1) $\operatorname{Ric}_g \geqslant \left(1-\dfrac{m(m-1)\log\left(\frac{R_{\max}+(m-n)\lambda}{m\lambda}\right)-\frac{(n-1)\pi^2(R_{\max}-R_{\min})}{\lambda}}{m(m-1)\log\left(\frac{R_{\max}+(m-n)\lambda}{m\lambda}\right)+(n-1)(m-1)\pi^2}\right)\lambda g,$

(2) $cg \leqslant \operatorname{Ric}_g \leqslant \left(\lambda+\dfrac{cm}{(n-1)\pi^2}\log\left(\dfrac{R_{\max}+(m-n)\lambda}{m\lambda}\right)\right)g$ *for some $c>0$,*

(3) $cg \leqslant \operatorname{Ric}_g \leqslant \left(\left(1+\dfrac{4m(m-1)}{(n-1)\pi^2}\log\left(\dfrac{R_{\max}+(m-n)\lambda}{m\lambda}\right)\right)c-R_{\max}+R_{\min}\right)g$ *for some $c>0$.*

また, quasi–Einstein 多様体に対する Hitchin–Thorpe 不等式に関して, 次が成り立つ：

Theorem 4.17 ([38])**.** *Let (M,g) be a four-dimensional compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying* (4.9) *with finite $m>1$. If the scalar curvature satisfies*

$$\int_M R^2 d\mu \leqslant 6\lambda\frac{m-2}{m+2}\int_M R d\mu+\frac{72\lambda^2}{m+2}\operatorname{vol}(M,g), \tag{4.18}$$

then the manifold (M,g) satisfies the Hitchin–Thorpe inequality $2\chi(M)\geqslant 3|\tau(M)|$.

Remark 4.19. Theorem 4.17 において, $m=\infty$ とすると quasi–Einstein 多様体は Ricci ソリトンになり (4.18) は Ma によって与えられた Ricci ソリトンが Hitchin–Thorpe 不等式を満たすための十分条件 (3.3) に帰着される.

また, Theorem 4.6 を quasi–Einstein 多様体に拡張することで, 次を得る：

Theorem 4.20 ([38])**.** *Let* (M,g) *be a four-dimensional compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying* (4.9) *with finite* $m>1$*. If the scalar curvature satisfies*

$$\int_M R^2 d\mu \leqslant 6\lambda\frac{m-2}{m+2}\int_M R d\mu + \frac{72\lambda^2}{m+2}\mathrm{vol}(M,g) - 192\pi^2\frac{m-1}{m+2}, \tag{4.21}$$

then the manifold (M,g) *must be isometric to the standard sphere* $\mathbb{S}^4$*.*

Remark 4.22. Theorem 4.20 において, $m=\infty$ とすると quasi–Einstein 多様体は Ricci ソリトンになり (4.21) は Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5] によって与えられた Ricci ソリトンが $\mathbb{S}^4$ と等長同型であるための十分条件 (4.7) に帰着される.

参考文献

[1] W. Ambrose, *A theorem of Myers*, Duke Math. J. **24** (1957), 345–348.

[2] B. Andrews and L. Ni, *Eigenvalue comparison on Bakry-Emery manifolds*, Comm. Partial Differential Equations **37** (2012), 2081–2092.

[3] A. L. Besse, "Einstein manifolds", Springer, New York, 1987.

[4] A. Barros, R. Batista, E. Ribeiro Jr., *Compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature are gradient*, Monatsh. Math. **174** (2014), 29–39.

[5] A. Brasil, E. Costa and E. Ribeiro Jr., *Hitchin-Thorpe inequality and Kaehler metrics for compact almost Ricci soliton*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **193** (2014), 1851–1860.

[6] H.-D. Cao, *Existence of gradient Kähler-Ricci solitons*, Elliptic and Parabolic Methods in Geometry (Minneapolis, MN, 1994), 1–16, A. K. Peters (ed.), Wellesley, MA, 1996.

[7] ____, *Recent progress on Ricci solitons*, Recent advances in geometric analysis, 1–38, Adv. Lect. Math. (ALM), 11, Int. Press, Somerville, MA, 2010.

[8] J. Case, Y.-J. Shu and G. Wei, *Rigidity of quasi-Einstein metrics*, Diff. Geom. Appl. **29** (2011), 93–100.

[9] B.-L. Chen, *Strong uniquenes of the Ricci flow*, J. Differential Geom. **82** (2009), 363–382.

[10] B. Chow, P. Lu and L. Ni, "Hamilton's Ricci flow", Graduate Studies in Mathematics, 77, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Science Press, New York, 2006.

[11] Y. Chu and Z. Hu, *Lower bound estimates of the first eigenvalue for the f-Laplacian and their applications*, Q. J. Math. **64** (2013), 1023–1041.

[12] M. Fernández-López and E. García-Río, *A remark on compact Ricci solitons*, Math. Ann. **340** (2008), 893–896.

[13] ____, *Diameter bounds and Hitchin-Thorpe inequalities for compact Ricci solitons*, Q. J. Math. **61** (2010), 319–327.

[14] D. Friedan, *Nonlinear models in $2+\varepsilon$ dimensions*, Ann. Phys. **163** (1985), 318–419.

[15] A. Futaki, H. Li and X.-D. Li, *On the first eigenvalue of the Witten-Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons*, Ann. Global Anal. Geom. **44** (2013), 105–114.

[16] A. Futaki and Y. Sano, *Lower diameter bounds for compact shrinking Ricci solitons*, Asian J. Math. **17** (2013), 17–32.

[17] A. Ghosh, *Certain contact metrics as Ricci almost solitons*, Results Math. **65** (2014), 81–94.

[18] ____, *Quasi-Einstein contact metric manifolds*, Glasgow Math. J. **57** (2015), 569–577.

[19] R. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), 237–262, Contemp. Math., 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[20] _____, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), 7–136, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[21] N. Hitchin, *Compact four-dimensional Einstein manifolds*, J. Differential Geom. **9** (1974), 435–442.

[22] N. Koiso, *On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metrics*, Recent topics in differential and analytic geometry, 327-337, Adv. Stud. Pure Math., 18-I, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[23] C. LeBrun, *Four-manifolds without Einstein metrics*, Math. Res. Lett. **3** (1996), 133–147.

[24] M. Limoncu, *Modifications of the Ricci tensor and applications*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), 191–199.

[25] _____, *The Bakry-Emery Ricci tensor and its applications to some compactness theorems*, Math. Z. **271** (2012), 715–722.

[26] L. Ma, *Remarks on compact Ricci solitons of dimension four*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **351** (2013), 817–823.

[27] G. Maschler, *Almost soliton duality*, Adv. Geom. **15** (2015), 159-166.

[28] S. B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J. **8** (1941), 401–404.

[29] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159

[30] _____, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109

[31] _____, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245

[32] S. Pigola, M. Rigoli, M. Rimoldi and A. G. Setti, *Ricci almost solitons*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), Vol. X (2011), 757–799.

[33] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications*, Q. J. Math. **48** (1997), 235–242.

[34] R. Sharma, *Certain results on K-contact and (k, μ)-contact manifolds*, J. Geom. **89** (2008), 138–147.

[35] H. Tadano, *Remark on a diameter bound for complete Riemannian manifolds with positive Bakry-Émery Ricci curvature*, Diff. Geom. Appl. **44** (2016), 136–143.

[36] _____, *An upper diameter bound for compact Ricci solitons with applications to the Hitchin-Thorpe inequality*, arXiv:1504.05384

[37] _____, *Some Ambrose and Galloway type theorems via modified Ricci curvature*, Preprint, 2015.

[38] _____, *Diameter bounds, gap theorems and Hitchin-Thorpe inequalities for compact quasi-Einstein manifolds*, Preprint, 2015.

[39] J. Thorpe, *Some remarks on the Gauss-Bonnet formula*, J. Math. Mech. **18** (1969), 779–786.

[40] L. F. Wang, *Rigid properties of quasi-Einstein metrics*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 3679–3689.

[41] ______, *On noncompact τ-quasi Einstein metrics*, Pacific. J. Math. **254** (2011), 449–464.

[42] ______, *Diameter estimate for compact quasi-Einstein metrics*, Math. Z. **273** (2013), 801–809.

[43] X.-J. Wang and X. Zhu, *Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class*, Adv. Math. **188** (2004), 87-103.

[44] G. Wei and W. Wylie, *Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor*, J. Differential Geom. **83** (2009), 377–405.

[45] S. Zhang, *A theorem of Ambrose for Bakry-Emery Ricci tensor*, Ann. Global Anal. Geom. **45** (2014), 233–238.