素数と素数のk乗の和について

鈴木雄太　(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)*1
Yuta Suzuki　(Nagoya University)

1. Binary additive problems with prime numbers

1742年, Goldbachは次の予想を提出しました:

「4以上の偶数はすべて素数2つの和で書けるであろう.」

これは今日**Goldbach予想**として知られている数論の古典的未解決問題のひとつです. 20世紀初頭までこのGoldbach予想に関して本質的な進展はありませんでしたが, 1923年にHardy-Littlewood [5]は次のような漸近式を導出するheuristicsを発表しました: 偶数nに対して$n\to\infty$のとき,

$$R(n)\sim\mathfrak{S}(n)n. \tag{1}$$

ただしここで,

$$R(n):=\sum_{l+m=n}\Lambda(l)\Lambda(m),\quad \mathfrak{S}(n):=\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

とし, 以後pは素数を表すこととしましょう. 無限積$\mathfrak{S}(n)$は**特異級数**と呼ばれます. この$R(n)$は偶数nを素数2つの和で書き表す表し方の個数をvon Mangoldt関数

$$\Lambda(n):=\begin{cases}\log p & (n\text{が素数}p\text{のべきの時}),\\ 0 & (\text{それ以外}).\end{cases}$$

で重み付けしたものとみなせます. 明らかに$\mathfrak{S}(n)\gg 1$なので, この漸近式はGoldbach予想に非常に強い情報を与えることになります. このHardy-Littlewood [5]のアイデアを使うことでChudakov [2], van der Corput [3], Estermann [4]は独立に次を得ました:

Theorem 1 (Chudakov [2], van der Corput [3], Estermann [4])**.** $X,A\geq 2$を実数とする. すると, 高々$\ll XL^{-A}$個の例外を除きすべての偶数$n\in(1,X]$に対して

$$R(n)=\mathfrak{S}(n)n(1+O(L^{-A})) \tag{2}$$

が成立する. ただしここで$L:=\log X$.

すなわち, 「ほとんどすべての」偶数に対してHardy-Littlewoodの漸近公式が成立するということが分かったわけです.

Hardy-Littlewood [5]は上記結果を導くようなアイデアだけでなく, 素数の加法的性質に関する新しい予想をいくつか提出しました. その中の1つを見てみます. 以下, $k\geq 2$を固定された自然数としましょう. 自然数の集合

$$\mathbf{Irr}_k:=\left\{\, n\in\mathbb{N}\;\middle|\; X^k-n:\ \text{irreducible over }\mathbb{Z}\,\right\}$$

を考えます. すると, Hardy-Littlewood [5, Conjecture H, L]は次を予想しました[1]:

「十分大きい自然数$n\in\mathbf{Irr}_k$は素数とk乗数の和で書けるであろう.」

---

*1 e-mail: `m14021y@math.nagoya-u.ac.jp`

[1] Hardy-Littlewood [5]は$k=2,3$の場合しか述べていませんが, ここでは後年の拡張を述べました.

本講演では**Hardy-Littlewood予想**と言ったらこの素数とk乗数の和に関する予想のことを指すとします．特に漸近式(1)の類似として

$$R_k(n) \sim \mathfrak{S}_k(n) n^{1/k} \quad (n \in \mathbf{Irr}_k,\ n \to \infty)$$

をHardy-Littlewoodの方法に従って予想することができます．ただしここで，

$$R_k(n) = \sum_{l+m^k=n} \Lambda(l), \quad \mathfrak{S}_k(n) := \prod_p \left(1 - \frac{\rho_k(n,p)-1}{p-1}\right),$$

$$\rho_k(n,p) := \#\left\{ x \pmod p \;\middle|\; x^k \equiv n \pmod p \right\}$$

としました．尚，条件$n \in \mathbf{Irr}_k$は条件$\mathfrak{S}_k(n) \neq 0$と同値であることに注意します．この問題に対しても，Theorem 1に対応する結果がMiech [9]（$k=2$の場合）と川田 [7]（kが一般の場合）によって得られています：

Theorem 2 (Miech [9], 川田 [7, Theorem 5])**.** $k \geq 2$を自然数，$X, A \geq 2$を実数とする．高々$\ll XL^{-A}$個の例外を除きすべての$n \in (1, X] \cap \mathbf{Irr}_k$に対して

$$R_k(n) = \mathfrak{S}_k(n) n^{1/k}(1 + O(L^{-A})) \tag{3}$$

が成立する．

実はこのHardy-Littlewood予想の特異級数$\mathfrak{S}_k(n)$の収束性はGoldbach予想の場合と比べて非常に取り扱いが難しくなります．実際，特異級数$\mathfrak{S}_k(n)$の収束性は代数体$\mathbb{Q}(n^{1/k})$のDedekind zeta関数の零点分布と深く関係しています．

一方Hua [6]は素数と素数のk乗の和について研究を始めました．自然数の集合

$$\mathbb{H}_k^{\mathrm{local}} := \{ n \in \mathbb{N} \mid \forall p,\ (p-1)|k \Rightarrow n \not\equiv 1 \pmod p \}$$

を導入し，$\mathbb{H}_k := \mathbb{H}_k^{\mathrm{local}} \cap \mathbf{Irr}_k$とおきましょう．すると次が予想されます:

「十分大きい自然数$n \in \mathbb{H}_k$は素数と素数のk乗の和で書けるであろう.」

この**Hua予想**に対するHardy-Littlewood型漸近公式は次のようになります:

$$R_{1,k}(n) \sim \mathfrak{S}_{1,k}(n) n^{1/k} \quad (n \in \mathbb{H}_k,\ n \to \infty),$$

ただしここで

$$R_{1,k}(n) = \sum_{l+m^k=n} \Lambda(l)\Lambda(m),$$

$$\mathfrak{S}_{1,k}(n) := \prod_{p|n}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p\nmid n}\left(1 - \frac{p(\rho_k(n,p)-1)+1}{(p-1)^2}\right)$$

としました．この場合も条件$n \in \mathbb{H}_k$は条件$\mathfrak{S}_{1,k}(n) \neq 0$と同値になることが分かります．この場合のTheorem 1の類似はSchwarz [16]の結果に川田 [7]の結果を組み合わせれば得られます:

Theorem 3 (Schwarz [16], 川田 [7])**.** $k \geq 2$を自然数，$X, A \geq 2$を実数とする．高々$\ll XL^{-A}$個の例外を除き，すべての$n \in (1, X] \cap \mathbb{H}_k$に対して

$$R_{1,k}(n) = \mathfrak{S}_{1,k}(n) n^{1/k}(1 + O(L^{-A})) \tag{4}$$

が成立する．

本講演では，このHua予想のHardy-Littlewood型漸近公式を短区間中で考察します．

2. Hardy-Littlewood asymptotic formula in short intervals

前節の Theorem 1, 2, 3 の「短区間版」を考えます. すなわち, 「どのくらい短い区間 $(X, X+H]$ においても, ほとんどすべての自然数が Hardy-Littlewood 型漸近公式を満たすと言えるか？」という問題を考えます. 以下の様な結果が得られています:

Theorem 4 (三河 [10], Perelli-Pintz [13])**.** $X, H, A \geq 2, \varepsilon > 0$ を実数とすると, 条件

$$X^{1/3+\varepsilon} \leq H \leq X$$

の下, 高々 $\ll HL^{-A}$ 個の例外を除きすべての偶数 $n \in (X, X+H]$ に対して漸近式 (2) が成立する.

Theorem 5 (三河 [11], Perelli-Pintz [14], Perelli-Zaccagnini [15])**.**
$k \geq 2$ を自然数とし, $X, H, A \geq 2, \varepsilon > 0$ を実数とする. すると条件

$$X^{1-1/k+\varepsilon} \leq H \leq X$$

の下, 高々 $\ll HL^{-A}$ 個の例外を除き, すべての $n \in (X, X+H] \cap \mathbf{Irr}_k$ に対して漸近式 (3) が成立する.

Theorem 6 (Liu-Zhan [8], Bauer [1])**.**
$k \geq 2$ を自然数とし, $X, H, A \geq 2, \varepsilon > 0$ を実数とする. すると条件

$$X^{1-1/2k+\varepsilon} \leq H \leq X$$

の下, 高々 $\ll HL^{-A}$ 個の例外を除き, すべての $n \in (X, X+H] \cap \mathbb{H}_k$ に対して漸近式 (4) が成立する.

Remark 1. ここではどの結果も "制限なし" の表現関数 [2] を考えましたが, 実はパラメータ Y を導入して, 制限付きの表現関数, 例えば

$$R^*(n) := \sum_{\substack{l+m=n \\ X-Y<l\leq X \\ m\leq Y}} \Lambda(l)\Lambda(m)$$

などを考えると H の範囲を広げることができます. しかし, 制限付きの表現関数からは制限なしの表現関数の情報を完全に復元することはできないので, ここでは制限なしの表現関数に限って話をすることにします.

3. Main result

今回, 前節で述べた Bauer による Theorem 6 の以下の様な改善を得ました:

Main Theorem. $k \geq 2$ を自然数とし, $X, H, A \geq 2, \varepsilon > 0$ を実数とする. すると条件

$$X^{1-1/k+\varepsilon} \leq H \leq X$$

の下, 高々 $\ll HL^{-A}$ 個の例外を除き, すべての $n \in (X, X+H] \cap \mathbb{H}_k$ に対して漸近式 (4) が成立する.

Remark 2. 前節で制限つきの表現関数を考えるトリックについて述べました. 先行研究のどの方法もこのトリックを組み合わせることが可能ですが, 本講演の方法は制限つきの表現関数には適用不可能です. 従って, この改善はあくまで制限なしの表現関数を考えた場合のみの改善です.

[2] $R(n), R_k(n), R_{1,k}(n)$ のような "表し方の個数" を数える関数のこと.

Remark 3. ちょっと驚いたことに, Main Theorem での H の動ける範囲は Hardy-Littlewood 予想における Theorem 5 の範囲と同じになっています.

本講演ではこの改善の方法について報告したいと思います.

4. Hardy-Littlewood method

考えている漸近式の誤差の 2 乗平均

$$\sum_{\substack{X<n\le X+H\\ n\in\mathbb{H}_k}} \left|R_{1,k}(n)-\mathfrak{S}_{1,k}(n)n^{1/k}\right|^2 \tag{5}$$

の評価[3]を試みます. 自明な評価

$$R_{1,k}(n) \ll X^{1/k}L$$

ないしは Hardy-Littlewood 型漸近公式 (4) と比較して見れば, 目標となるのは

$$\sum_{\substack{X<n\le X+H\\ n\in\mathbb{H}_k}} \left|R_{1,k}(n)-\mathfrak{S}_{1,k}(n)n^{1/k}\right|^2 \ll HX^{2/k}L^{-A}$$

というような形の評価ということになります. Main Theorem はこの形の評価に Chebyshev 不等式を用いれば直ちに得られます. 自然数 k に対して, 三角多項式たち

$$S_k(\alpha) := \sum_{n^k\le 2X} \Lambda(n)e(n^k\alpha)$$

を導入します[4]. すると加法的指標の直交性より

$$R_{1,k}(n) = \int_0^1 S_1(\alpha)S_k(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$$

を得ます. そこで積分範囲を major arcs $\mathfrak{M}$ および minor arcs $\mathfrak{m}$ に分割し[5], 誤差の 2 乗平均 (5) を

$$\ll \sum_{\substack{X<n\le X+H\\ n\in\mathbb{H}_k}} \left|\int_{\mathfrak{M}} S_1(\alpha)S_k(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha-\mathfrak{S}_{1,k}(n)n^{1/k}\right|^2 + \sum_{X<n\le X+H} \left|\int_{\mathfrak{m}} S_1(\alpha)S_k(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha\right|^2$$

と評価します. 前者の major arcs $\mathfrak{M}$ に関する部分は標準的な方法で計算できてしまうので, ここでは詳細を述べません. 後者の minor arcs $\mathfrak{m}$ に関する部分を考えましょう. 準備として $S_k(\alpha)$ を定義する和を dyadic に分割して

$$S_k(\alpha) = \sum_{X<n^k\le 2X} \Lambda(n)e(n^k\alpha)$$

と思えるようにしておきます.

---

[3] 本当はここで特異級数は一旦部分和で置き換えて考えて, 後に川田 [7] の方法によって完全な特異級数に直す作業が必要ですが, ここでは省略します.

[4] 本当は major arc 上の計算のために, 和の範囲を適当な定数 B を用いて $XL^{-kB} < n^k \le X$ というように制限しなければいけません. しかしここでは簡単のために和を取る変数を単に上から抑えただけにとどめました.

[5] ここで major arcs $\mathfrak{M}$ とは三角多項式の近似がしやすい部分であり, $\mathfrak{M}$ の寄与のみから主要項が見えてきます. また minor arcs $\mathfrak{m}$ とは単位区間の major arcs 以外の部分であり, 主要項への寄与は小さいと期待されます.

5. The minor arcs

このminor arcs上の積分の取り扱い方がLiu-Zhan [8]やBauer [1]の先行研究と大きく違う部分です．全体としては, 三河-Peneva [12]の手法をより高次の多項式に拡張して, そこにPerelli-Pintz [13]による双子素数予想ないしはGoldbach予想の場合のminor arc評価を持ち込むことでMain Theoremに必要なminor arc評価が得られます．

まず, 三河-Peneva [12]に従いCesàro weightを利用して2乗を開いて評価すると,

$$\sum_{X<n\le X+H}\left|\int_{\mathfrak{m}} S_1(\alpha)S_k(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha\right|^2 \ll \int_0^1\int_{\mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^2\,|S_k(\alpha+\beta)|^2\,F_H(\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

とできます．ただしここで$F_H(\alpha)$はFejér核[6]

$$F_H(\alpha) := \sum_h w(h)e(h\alpha),\quad w(h) := \max\left(1-\frac{|h|}{2H},0\right)$$

です．ここで$|S_k(\alpha+\beta)|^2$の2乗を開いて, $S_k(\alpha+\beta)$の定義を思い出し, 和を積分の外に出します．すると, von Mangoldt関数$\Lambda(n)$をただの$\log n$で抑えてしまうことで

$$\ll L^2 \sum\sum_{X<m_1^k, m_2^k\le 2X} w(m_1^k-m_2^k)\left|\int_{\mathfrak{m}}|S_1(\alpha)|^2\,e(-(m_1^k-m_2^k)\alpha)d\alpha\right| \tag{6}$$

を得ます．もしこのまま評価がうまく行けば, 最後に行った操作は「素数のk乗に渡る和をただのk乗数に渡る和に置き換えた」ということを意味しています．和(6)は双子素数予想ないしはGoldbach予想の場合のminor arc上の積分の平均

$$\sum_{X<n\le X+H}\left|\int_{\mathfrak{m}}|S_1(\alpha)|^2\,e(-n\alpha)d\alpha\right|^2$$

の類似物と思えます．ただし, 積分の中にある加法的指標に$k-1$次多項式が入れられているので, このままではGoldbach予想の場合の結果をそのまま用いることは出来ません．そこでなんとかWeyl差分を用いられる形にして, 多項式の次数を下げることを目標にします．さて, 和(6)にCauchy-Schwarz不等式を使って2乗の形を作った後に再度2乗を開きます．すると本質的に

$$\int_{\mathfrak{m}}\int_{\mathfrak{m}}|S_1(\alpha)|^2\,|S_1(\beta)|^2\,\Phi_k(\alpha-\beta)d\alpha d\beta,$$

$$\Phi_k(\alpha) := \sum\sum_{X<m_1^k, m_2^k\le 2X} w(m_1^k-m_2^k)e((m_1^k-m_2^k)\alpha)$$

というような量を評価すれば良いということになります．そうしたら後はHölder不等式を使って三角多項式$\Phi_k(\alpha)$ の次数を上げた後にWeyl差分を用いれば, 加法的指標の中にある多項式の次数を1次にまで落とすことができます．そうしてminor arcs上の積分の評価は

$$\sum_{1\le h\ll H}\left|\int_{\mathfrak{m}}|S_1(\alpha)|^2\,e(-h\alpha)d\alpha\right|^2$$

という和の評価に帰着でき, Perelli-Pintz [13]の方法を用いることでMain Theoremに必要なminor arc評価を得ます．

[6] 本当はHが自然数でないといけませんが, Hを自然数としても一般性を失わないことが容易に分かります．Xに関しても同様です．

Remark 4. Main Theorem の H の範囲

$$X^{1-1/k+\varepsilon} \leq H \leq X$$

がどの部分から決まってしまうのかを見てみます．実は和 (6) の時点で，この H への制限が必要になっていることが分かります．実際，和 (6) の中で $m_1 = m_2$ なる項たちの寄与を考えてみると

$$\left(\sum_{X < m^k \leq 2X} 1 \right) \cdot \left(\int_{\mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^2 \, d\alpha \right) \tag{7}$$

となります．ここで，区間 $(X, 2X]$ 内の k 乗数の個数は $\asymp X^{1/k}$ で，積分の方はある正の定数 C によって $\ll XL^{-C}$ くらいの評価までしか期待できないので，(7) は結局 $X^{1+1/k}$ くらいの量を寄与することになります．これが $HX^{2/k}$ 程度で抑えられる必要がありますが，(7) の寄与と比べると

$$X^{1+1/k} \ll HX^{2/k} \Longrightarrow X^{1-1/k} \ll H$$

くらいの制限は (6) の時点でつかざるをえなくなってしまっているわけです．

参考文献

[1] C. Bauer, *On the sum of a prime and the k-th power of a prime*, Acta Arith. **85** (1998), 99–118.

[2] N. G. Chudakov, *On the density of the set of even numbers which are not representable as a sum of two primes*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **2** (1938), 25—40.

[3] J. G. van der Corput, *Sur l'hypothése de Goldbach pour presque tous les nombres pairs*, Acta Arith. **2** (1937), 266-290.

[4] T. Estermann, *On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes*, Proc. London Math. Soc., (2) **44** (1938), 307–314.

[5] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), 1–70.

[6] L. K. Hua, *Some results in additive prime number theory*, Quart. J. Math. **9** (1938), 68–80.

[7] K. Kawada, *Contributions to Additive Theory of Numbers*, PhD Thesis, Univ. of Tsukuba, 1993.

[8] J. Y. Liu and T. Zhan, *On a theorem of Hua*, Arch. Math. **69** (1997), 375–390.

[9] R. J. Miech, *On the equation $n = p + x^2$*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 494–512.

[10] H. Mikawa, *On prime twins*, Tsukuba J. Math. **15** (1991), 19–29.

[11] H. Mikawa, *On the sum of a prime and a square*, Tsukuba J. Math. **17** (1993), 299–310.

[12] H. Mikawa and T. Peneva, *Sums of five cubes of primes*, Studia Sci. Math. Hungar. (3) **46** (2009), 345–354.

[13] A. Perelli and J. Pintz, *On the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals*, J. London Math. Soc. (2) **47** (1993), 41–49.

[14] A. Perelli and J. Pintz, *Hardy-Littlewood numbers in short intervals*, J. Number Theory **54** (1995), 297–308.

[15] A. Perelli and A. Zaccagnini, *On the sum of a prime and a k-th power*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Math. **59** (1995), 185–200.

[16] W. Schwarz, *Zur Darstellung von Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen* II, J. Reine Angew Math. **206** (1961), 78–112.