マトロイドの組合せにおけるトーリックイデアルについて

柴田 和樹 (KAZUKI SHIBATA) (立教大学理学部)

集合 $E=\{1,\ldots,d\}$ と $(\emptyset \neq)\mathcal{B}=\{B_1,\ldots,B_n\}\subset 2^E$ $(\#B_i=r)$ に対し, 以下の条件を満たすとき, $M=(E,\mathcal{B})$ を**マトロイド**という.

- 任意の $x\in B_i\setminus B_j$ $(1\le i,j\le n)$ に対し, $(B_i\cup\{y\})\setminus\{x\}, (B_j\cup\{x\})\setminus\{y\}\in\mathcal{B}$ となる $y\in B_j\setminus B_i$ が存在する.

集合 $\mathcal{B}$ の元のことをマトロイドの *basis* と呼び, r を *rank* という. 以下, マトロイド M の bases の集合を $\mathcal{B}(M)$ と表す. 次にマトロイドに付随するトーリックイデアルを定義する. K を体とし, $K[X]=K[x_1,\ldots,x_n]$ を n 変数多項式環とする. 配置 $\mathcal{D}_M=\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}\subset\mathbb{Z}^d$ を

$$\mathbf{b}_j=\sum_{l\in B_j}\mathbf{e}_l \quad (1\le j\le n)$$

と定める. ここで, $\mathbf{e}_j$ は $\mathbb{R}^d$ の単位座標ベクトルとする. また, 配置 $\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ と $d\times n$ 整数行列 $(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n)$ を同一視する. このとき M の**トーリックイデアル** J_M を

$$J_M=\left\langle \prod_{l=1}^{u}x_{j_l}-\prod_{l=1}^{u}x_{k_l} \;\middle|\; \sum_{l=1}^{u}(\mathbf{b}_{j_l}-\mathbf{b}_{k_l})=\mathbf{0}\right\rangle$$

と定義する. また半群環 $R_M=K[X]/J_M$ を M の *bases monomial ring* [12] と呼ぶ. この半群環に対し, 以下のことが知られている.

Proposition 0.1. 任意のマトロイド M に対し, bases monomial ring R_M は normal である. 特に, R_M は Cohen-Macaulay である. ここで, R_M が *normal* であるとは

$$\mathbb{Z}_{\ge0}\mathcal{D}_M=\mathbb{Q}_{\ge0}\mathcal{D}_M\cap\mathbb{Z}\mathcal{D}_M$$

をみたすときにいう. ($\mathbb{Z}_{\ge0}\mathcal{D}_M=\{\sum_{i=1}^{n}r_i\mathbf{b}_i \mid r_i\in\mathbb{Z}_{\ge0}\}$, $\mathbb{Z}\mathcal{D}_M,\mathbb{Q}_{\ge0}\mathcal{D}_M$ も同様.)

集合 $\mathcal{G}_M$ を

$$\mathcal{G}_M=\left\{x_ix_j-x_kx_l \;\middle|\; \begin{array}{l}\alpha\in B_i\setminus B_j\\ \beta\in B_j\setminus B_i\\ B_k=(B_i\cup\{\beta\})\setminus\{\alpha\}\\ B_l=(B_j\cup\{\alpha\})\setminus\{\beta\}\end{array}\right\}\subset J_M$$

と定義する. マトロイドのトーリックイデアルに関し, 以下の予想が存在する.

Conjecture 0.2. 任意のマトロイド M に対し,

(*a*) $\mathcal{G}_M$ は J_M の生成系である; [13, 11]
(*b*) $\mathcal{G}_M$ が J_M のグレブナー基底となる単項式順序が存在する.

Conjecture 0.2(a) は graphic matroid [1], rank ≤ 3 のマトロイド [5], sparse paving matroid [3], strongly base orderable matroid [6] のとき成り立ち, Conjecture 0.2(b) は uniform matroid [10], rank ≤ 2 のマトロイド [7, 2], $M(K_4)$-minor をもたない graphic matroid [2], lattice path matroid [8] のとき成り立つことがわかっている. また, 以下の予想は Conjecture 0.2 を弱めたものとなっているが, まだ未解決である.

Conjecture 0.3. 任意のマトロイド M に対し,

(a) J_M は 2 次生成である;
(b) J_M は 2 次グレブナー基底をもつ.

Conca [4] は transversal matroid に対し, Conjecture 0.3(a) が成り立つことを示した.

本講演では, 2 つのマトロイドを組み合わせたときにトーリックイデアルの生成系やグレブナー基底がどのようになるのかについて講演し, その結果, 以下の定理が成り立つことを紹介する.

Theorem 0.4 ([9])**.** マトロイド M が P_6, Q_6, $M(K_4)$, $\mathcal{W}^3$-minor をもたないならば, J_M は 2 次グレブナー基底をもつ.

References

[1] J. Blasiak, The toric ideal of a graphic matroid is generated by quadrics, *Combinatorica*, **28** (3) (2008), 283-297.
[2] S. Blum, Base-sortable matroids and Koszulness of semigroup rings, *Europ. J. Combin.*, **22** (2001), 937-951.
[3] J. Bonin, Basis-exchange properties of sparse paving matroids, *Adv. in Appl. Math.*, **50** (2013), 6-15.
[4] A, Conca, Linear spaces, transversal polymatroids and ASL domain, *J. Algebraic Comb.*, **25** (2007), 25-41.
[5] K. Kashiwabara, The toric ideal of a matroid of rank 3 is generated by quadrics, *Electron. J. Combin.*, **17** (2010), # R28.
[6] M. Lasoń and M. Michałek, On the toric ideal of a matroid, *Adv. Math.*, **259** (2014), 1-12.
[7] H. Ohsugi and T. Hibi, Compressed polytopes, initial ideals and complete multipartite graphs, *Illinois J. Math.*, **44** (2000), no. **2**, 141-146.
[8] J. Schweig, Toric ideals of lattice path matroids and polymatroids, *J. Pure Appl. Algebra*, **215** (2011), no. 11, 2660-2665.
[9] K. Shibata, Toric ideals of series and parallel connections of matroids, *J. Algebra Appl.*, in press.
[10] B. Sturmfels, "Gröbner bases and convex polytopes," Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
[11] B. Sturmfels, Equations defining toric varieties, *Proc. Sympos. Pure Math.* **62** (1997), 437-449.
[12] N. White, The basis monomial ring of a matroid, *Adv. Math.* **24** (1977), 292-297.
[13] N. White, A unique exchange property for bases, *Linear Algebra Appl.* **31** (1980), 81-91.

Kazuki Shibata, Department of Mathematics, College of Science, Rikkyo University, Toshima-ku, Tokyo 171-8501, Japan.
E-mail address: k-shibata@rikkyo.ac.jp