Oriented graphの非対称性について

佐竹 翔平 (Shohei Satake) (名古屋大学大学院情報科学研究科)*

本研究は神戸大学の澤 正憲准教授, 中部大学の神保 雅一教授との共同研究である.

一般に与えられたグラフなどの数学的構造の対称性の高さはその全自己同型群の位数で測られる. 本講演ではグラフと向き付けされたグラフに着目する. **(無向) グラフ**とは集合 V と, $E \subset \binom{V}{2}$ [1] の組で表される構造であり, **向き付けされたグラフ**とは集合 V と $(u,v) \in E \Rightarrow (v,u) \notin E$ をみたす $E \subset V^2$ の組で表される構造である. また V の要素を**頂点**, E の要素を**辺**といい, 与えられた無向または向き付けされたグラフ H について頂点集合, 辺集合をそれぞれ $V(H)$, $E(H)$ で表すことにする [2].

グラフ G においては $\{u,v\} \in E(G) \iff \{u^\sigma, v^\sigma\} \in E(G)$ をみたす $V(G)$ 上の置換 σ を G の**自己同型**といい, G の全自己同型群を $\mathrm{Aut}(G)$ で表す [3]. その意味で, グラフ G について $|\mathrm{Aut}(G)| > 1$ であるとき, G は**対称**であるといい, そうでないとき G は**非対称**であるという. だがこの尺度では, 非対称な 2 つのグラフ G, G' が与えられたとき, 両者を比較することはできない. ではどのようにしてグラフの "非対称性" を測ればよいのだろうか. この問題に最初に解答を与えたのが 1963 年の Erdős, Rényi の論文 [4] である. [4] では非対称な有限グラフ G に対して, 辺を適当に追加または除去してある対称なグラフに変形する操作 **symmetrization** を考え, 各 symmetrization にかかわった辺の数の最小値を $A(G)$ とよび, それを G の非対称性の尺度とした. ただし, G が対称であるとき $A(G) = 0$ とし, G が K_1 であるときには $A(G) = \infty$ と定義する. まず $A(G)$ について以下の定理が導かれる.

定理 1 (Erdős-Rényi [4])**.** *$n \geq 2$ とし, G を n 頂点からなるグラフとする. このとき*

$$A(G) \leq [\frac{n-1}{2}].$$

だがこの上界を達成するグラフを見つけるのは容易ではない. そこで [4] は, 十分大きな n についてはその $A(G)$ が上界に近い値をもつような n 頂点グラフ G の存在性を **Erdős-Rényi ランダムグラフ**の手法を用いて示している. 例えば, 性質 $\mathcal{P}$ をもつグラフの存在性を示したいとしよう. n 点集合に対し, その各 2 点部分集合に対して, 辺を確率 1/2 で選ぶ試行を独立に行って, ランダムに n 頂点グラフを生成する. そのようなグラフを Erdős-Rényi ランダムグラフ, または単に**ランダムグラフ**と呼び, ランダムグラフ全体の集合を $\mathcal{G}(n,1/2)$ で表す. このときに確率 $P[\{G \in \mathcal{G}(n,1/2) \mid G \text{ は } \mathcal{P} \text{ をみたさない }\}]$ が 1 "より小さい" ことを示せば, 所望のグラフの存在性を示すことができる. より詳しくは [3, Chapter 11] 等を参照されたい.

また, [4] では可算無限グラフの対称性についても述べられており, **可算無限ランダムグラフ**は確率 1 で **Rado グラフ** R と呼ばれるグラフに同型になることが示されている. R とは以下の定義を満たす可算無限グラフである.

---

* 〒464-8601 名古屋市千種区不老町 名古屋大学大学院情報科学研究科計算機数理科学専攻
e-mail: `satake.shohei@f.mbox.nagoya-u.ac.jp`

[1] $\binom{V}{2}$ で V の 2 点部分集合全体を表す.

[2] その他のグラフ理論の用語については Diestel の教科書 [3] 等を参照されたい.

[3] 向き付けされたグラフについても同様に定義される.

(*) 任意の互いに交わらない有限の頂点部分集合 U, V に対して, U のすべての頂点との間に辺があり, V のすべての頂点との間に辺をもたないような頂点 $z \notin U \cup V$ が存在する.

この定義を満たすグラフは同型を除いて一意であることが往復論法を用いて示される. その議論から次の事実が成り立つ.

定理 2 (cf. Cameron [1], Erdős-Rényi [4]). *R は対称であり, さらに $|\mathrm{Aut}(R)| = 2^{\aleph_0}$.*

この事実から R は高い対称性をもつグラフであることがわかる. R は数学的に非常に興味深いグラフであり, その他の R の性質についても多くのモデル理論や組合せ論の研究者によって調べられている.

こうした非対称性に関する問題については, もちろん様々なアプローチが考えられるが, 本講演では, Erdős, Rényi の仕事に着目し, その向きづけされたグラフに関する類似 ([5], [6]) を与える. 以下, 混乱のおそれがない限り, 向き付けされたグラフを単純に "グラフ" と書くことにする. まず, 非対称な有限グラフ D に対して辺の除去, 追加または辺の向きの変更を行ってある対称なグラフに変形する操作を D の **symmetrization** とよび, $A(D)$ をそのかかわった辺の数の最小値と定義する. まず $A(D)$ について以下の上界が得られた.

定理 3 (S-Sawa-Jimbo [5]). *$n \geq 3$ とし, D を n 頂点からなるグラフとする. このとき*

$$A(D) \leq [\frac{2n+1}{3}].$$

向き付けされたグラフの場合でも無向の場合と同様, 上界を達成するグラフを見つけるのは困難である. そこで次の定理でこの上界が漸近的に最良であることを Erdős-Rényi ランダム (oriented) グラフの手法を用いて示す. 講演では証明のアイデアを簡潔に述べる予定である.

定理 4 (S-Sawa-Jimbo-Enomoto [5]). *任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 $n_0(\epsilon)$ があって, 任意の $n > n_0(\epsilon)$ について $A(D) > \frac{2}{3}n(1-\epsilon)$ であるような n 頂点グラフ D が存在する.*

また可算無限グラフについての対称性に関する結果も得られた. 可算無限ランダム (oriented) グラフは **random oriented graph** RO (cf. [2]) とよばれるグラフと確率 1 で同型になる.

(*) 任意の互いに交わらない有限の頂点部分集合 U, V, W に対して, U のすべての頂点から z に向かう辺があり, V のすべての頂点に z から向かう辺があり, W のすべての頂点と z の間に辺をもたないような頂点 $z \notin U \cup V \cup W$ が存在する.

この定義をみたすグラフは R と同様にして, 同型を除いて一意であることが示される. この RO について次の定理が成り立つ.

定理 5 (S-Sawa-Jimbo [5]). *RO は対称である. さらに $|\mathrm{Aut}(RO)| = 2^{\aleph_0}$.*

講演では, この定理の証明をいくつかの方法で与える. また, 時間の許す限り, RO のグラフ理論的性質や $\mathrm{Aut}(RO)$ の性質についても議論したい.

謝辞

定理4の証明について, 榎本彦衛先生から多くのアイデアとご助言をいただきました. 御礼申し上げます.

参考文献

[1] P. J. Cameron. The random graph, in : "The mathematics of Paul Erdős II", R. L. Graham, J. Nesetril, S. Butler ed., Algorithms and Combinatorics **14**, Springer, Berlin, 1997, 333-351.

[2] R. Diestel, I. Leader, A. Scott, S. Thomassé. Partitions and orientations of the Rado graph. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 2395–2405.

[3] R. Diestel. Graph theory. Fourth ed. Graduate Texts in Mathematics, **173**. Springer, Heidelberg, 2010.

[4] P. Erdős, A. Rényi. Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 295–315.

[5] S. Satake, M. Sawa, and M. Jimbo. Erdős-Rényi Theory for Asymmetric Digraphs. preprint.

[6] S. Satake, M. Sawa, and M. Jimbo. グラフの非対称性に関するErdős-Rényiの定理とその有向グラフへの拡張 (Japanese). To appear in RIMS Kokyuroku.