双一次形式を用いてLie代数とその表現を次数つきLie代数に埋め込む方法

佐々野 詠淑 (Nagatoshi SASANO)
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所[1]

Abstract

有限次元簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現が与えられたとき, Lie 代数上の双一次形式を使って, これらを部分構造として含むような大きな次数つき Lie 代数を構成することができる. この理論を応用して概均質ベクトル空間と次数つき Lie 代数の関係について考察する.

1 序文

$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ を次数付けられた複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元半単純 Lie 代数としよう. すると, $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ 及びその表現 $(\mathfrak{g}_0, \mathrm{ad}, \mathfrak{g}_1)$ が得られる. このとき, $\mathfrak{g}_0$ は有限次元簡約可能 Lie 代数であり, $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g}_1)$ は完全可約な表現である. さらに, この表現は概均質ベクトル空間を誘導することが知られており, これから得られる概均質ベクトル空間は放物型概均質ベクトル空間と呼ばれている (PV of parabolic type, [2] 参照). 大雑把な言い方をすれば, 次数付けられた有限次元半単純 Lie 代数に「埋め込む」ことが出来る表現が放物型概均質ベクトル空間である. 放物型概均質ベクトル空間は Lie 代数の性質と関連しているので分析しやすく, また, H. Rubenthaler によって Dynkin 図形を用いた完全な分類が報告されている ([2, pp.137–140] 参照).

一方で, 殆どの概均質ベクトル空間は「放物型でない」ことが知られている. では, 放物型概均質ベクトル空間理論の「逆」として, 任意に有限次元簡約可能 Lie とその完全可約表現が与えられたとき, これらを「埋め込む」ことができるような大きな次数つき Lie 代数は存在するのだろうか. 本稿ではこの問いに対し, 肯定的な解答を与える. すなわち, 与えられた有限次元簡約可能 Lie 代数上の双一次形式を媒介として, これらの構造をその部分構造として含むような次数つき Lie 代数が存在することを示す (本稿 Theorem 2.3 参照).

2 標準的な四つ組とそれに付随する次数つき Lie 代数

本節の内容の詳細については, [4] を参照されたい. また, 本節では有限次元簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現を扱うが, これらについて概均質性に関する仮定は置かれていないことを強調しておく. 天下り的ではあるが, まず, 次の写像を定義することからはじめる.

Definition 2.1 (Φ-写像)**.** $\mathfrak{g}$ を有限次元簡約可能 Lie 代数, (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現, B_0 を $\mathfrak{g}$ 上の非退化対称不変双一次形式[2] とする. 四つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ に対し, 線形写像 $\Phi_\rho : V \otimes \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) \to \mathfrak{g}$

---

[1] e-mail: n-sasano@imi.kyushu-u.ac.jp
本研究は JST CREST 研究課題「デジタル映像数学の構築と表現技術の革新」の助成を受けたものである.

[2] 不変とは, 等式 $B_0([a, b], c) = B_0(a, [b, c])$ が任意の $a, b, c \in \mathfrak{g}$ に対して成立することを言う. 有限次元簡約可能 Lie 代数は必ず非退化対称不変双一次形式を持つことが知られている ([1, Chapter 1. §6.4. Proposition 5] 参照).

を次の等式によって定義する：

$$B_0(a, \Phi_\rho(v \otimes \phi)) = \langle \rho(a)v, \phi \rangle. \tag{2.1}$$

ただし, $a \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, $\phi \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ であって, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は V と $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ の間の自然な pairing を表す. この写像 Φ_ρ を四つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ の Φ-写像と呼ぶ. Φ-写像は $\mathfrak{g}$-加群の準同型写像でもある.

少々分かりにくい定義であるが, Φ-写像は well-defined である. 実際, Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が有限次元であることと双一次形式 B_0 が非退化であるという条件から $\mathfrak{g}$ と $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ は $b \mapsto (a \mapsto B_0(b, a))$ という対応で同一視できるが, $v \in V$, $\phi \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ から定まる写像 $(a \mapsto \langle \rho(a)v, \phi \rangle) \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ に対応する元として $\Phi_\rho(v \otimes \phi) \in \mathfrak{g}$ が定義できる. また, B_0 が不変であるという仮定は Φ-写像が $\mathfrak{g}$-加群の準同型であることを証明するのに用いられる. 勿論, 一般に, 双一次形式 B_0 の取り方を変えれば Φ-写像も変化する. しかし, 双一次形式を媒介とすることで任意の有限次元簡約可能 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 及びその表現 V に対し, $\mathfrak{g}$ と $V \otimes \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ の間に $\mathfrak{g}$-加群の準同型が存在することが分かった.

Definition 2.2 (標準的な四つ組)**.** 記号は Definition 2.1 のものをそのまま使う. ρ が忠実かつ完全可約で, V が 0 でない不変元を持たないとき, 四つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ は**標準的な四つ組 (standard quadruplet)** と言う.

この定義は考察する Lie 代数及びその表現における「無駄な部分」を排除するためのものである. 有限次元簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現を次数つき Lie 代数に埋め込む, と言う問題を考察するとき, これに忠実性及び 0 でない不変元が存在しないことを仮定しても一般性は失われない. そして, 標準的な四つ組に対する次の主張が本稿の主定理の一つである.

Theorem 2.3 (四つ組に付随する Lie 代数)**.** *標準的な四つ組* $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ *に対し,（一般には無限次元の）次数つき Lie 代数* $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ *で, 条件*

$$V_{-1} \simeq \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}), \quad V_0 \simeq \mathfrak{g}, \quad V_1 \simeq V, \qquad (\mathfrak{g}\text{-加群として})$$

*を満たすものが存在する. これを***四つ組** $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ **に付随する Lie 代数***と呼ぶ. 上の* $\mathfrak{g}$*-加群の同型の下で, 制限された* $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ *の bracket 積* $[\cdot, \cdot] : V_{-1} \times V_1 \to V_0$ *は* $\Phi_\rho : V \otimes \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) \to \mathfrak{g}$ *と同一視できる.*

論文 [4, Theorem 2.11] では四つ組に付随する Lie 代数を具体的に構成することでこれの証明としている. また, [3] では H. Rubenthaler によって同様の結果が発表されている. 彼の証明は V. Kac による先行研究を応用したものである. 繰り返すが, ここでは概均質性の仮定は置かれていないことに注意していただきたい. つまり, Theorem 2.3 によって任意の簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現が次数つき Lie 代数に埋め込まれることが分かったが, 埋め込みが可能であることと表現の概均質性は無関係である. 標準的な四つ組とそれに付随する Lie 代数の例で代表的なものを以下に二つ挙げる.

Example 2.4 (ループ代数)**.** 任意の有限次元単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 及びその Killing 形式 $K_\mathfrak{g}$ に対し, 四つ組 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}, \mathfrak{g}, K_\mathfrak{g})$ は標準的な四つ組である. これに対応する次数つき Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}, \mathfrak{g}, K_\mathfrak{g})$ はループ代数 $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{g}$ に同型である.

Example 2.5 (有限次元半単純 Lie 代数)**.** $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ を次数付けられた半単純 Lie 代数とし, $K_\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式とする. ここで, $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数及びその表現 $(\mathfrak{g}_0, \mathrm{ad}, \mathfrak{g}_1)$ は放物型概均

質ベクトル空間を誘導することに注意されたい. さて, 今登場した表現と, $K_{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ への制限からなる四つ組 $(\mathfrak{g}_0, \mathrm{ad}, \mathfrak{g}_1, K_{\mathfrak{g}}\mid_{\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_0})$ は標準的な四つ組であり, これに対応する次数つき Lie 代数 $L(\mathfrak{g}_0, \mathrm{ad}, \mathfrak{g}_1, K_{\mathfrak{g}}\mid_{\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_0})$ は $\mathfrak{g}$ に同型である.

逆に, ある標準的な四つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ に対応する Lie 代数が有限次元であるとき, この四つ組は上記の方法で放物型概均質ベクトル空間から構成される. すなわち, 放物型概均質ベクトル空間とは簡約可能 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 及びその表現 (ρ, V) であって, $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$ を有限次元にするような B_0 が存在するものである, という言い方も出来る.

3 概均質ベクトル空間と次数つき Lie 代数

前節の結果を概均質ベクトル空間論へ応用することを考えよう. 概均質ベクトル空間論の一般論については [6] などを, 本節の内容の詳細については [5] を参照されたい. 定理 2.3 によって簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現が (概均質性に関係なく) 次数つき Lie 代数に埋め込まれることが分かったが, 特に概均質ベクトル空間の微分表現を次数つき Lie 代数に埋め込んだとき, 受け皿の Lie 代数にはどのような性質が見られるのだろうか. この問いに対する答が次の定理であり, 本稿のもう一つの主結果である.

Theorem 3.1. *G を連結な簡約可能代数群, (ρ, V) を G の完全可約表現とする. $\mathrm{Lie}(G)$ を G の Lie 代数, $(d\rho, V)$ を (ρ, V) の微分表現とする. このとき, (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間であるための必要十分条件は, 次が成立するような $\mathrm{Lie}(G)$ 上の非退化対称不変双一次形式 B_0 が存在することである :*

- *四つ組 $(\mathrm{Lie}(G), d\rho, V, B_0)$ は標準的であり, これに対応する Lie 代数 $L(\mathrm{Lie}(G), d\rho, V, B_0) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ は, $\mathrm{ad}\, v : V_{-1} \to V_0$ を単射にするような $v \in V_1$ を持つ.*

すなわち, 簡約可能代数群の表現の概均質性は次数つき Lie 代数の代数的性質で表すことができる. そして, これを応用すれば $(G \times GL_n, \rho\otimes\Lambda_1, V\otimes\mathbb{C}^n)$ の形の三つ組の概均質性を (G, ρ, V) の言葉で記述できる.

Lemma 3.2. *GL_n の n 次元列ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ への自然な表現を Λ_1 で表す. Theorem 3.1 の記号の下, 三つ組 $(G \times GL_n, \rho\otimes\Lambda_1, V\otimes\mathbb{C}^n)$ が概均質ベクトル空間であるための必要十分条件は, 次で定義されるベクトル空間*

$$S_{(v_1,\ldots,v_n)} := \{(\phi_1, \ldots, \phi_n) \in (\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}))^n \mid \langle v_i, \phi_j\rangle = 0\ (1 \le i, j \le n), \quad \sum_{k=1}^{n} \Phi_\rho(v_k \otimes \phi_k) = 0\}$$

が $\{0\}$ となるような $v_1, \ldots, v_n \in V$ が存在することである. ただし, Φ_ρ は四つ組 $(\mathrm{Lie}(G), d\rho, V, B_0)$ の Φ-写像を表す.

この補題の直接の応用が次に挙げる「裏返し変換の別証明」である.

Theorem 3.3 (裏返し変換)**.** *$m := \dim V > n$ とする. Theorem 3.1 の記号の下, $(G \times GL_n, \rho\otimes\Lambda_1, V\otimes\mathbb{C}^n)$ が概均質ベクトル空間であることの必要十分条件は, $(G \times GL_{m-n}, \rho^*\otimes\Lambda_1, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})\otimes\mathbb{C}^{m-n})$ が概均質ベクトル空間になることである.*

証明はLemma 3.2から得られるが, ここでは概略を述べるにとどめる. まず, $(G\times GL_n, \rho\otimes\Lambda_1, V\otimes\mathbb{C}^n)$ が概均質であると仮定し, Lemma 3.2 を使って $S_{(v_1,\ldots,v_n)}=\{0\}$ であるような $v_1,\ldots,v_n\in V$ をとる. そして, V の部分ベクトル空間 $\mathbb{C}v_1+\cdots+\mathbb{C}v_n\subset V$ と直交する $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$ の $(m-n)$ 次元部分ベクトル空間をとり, さらにその基底 $\psi_1,\ldots,\psi_{m-n}$ をとれば, $S_{(\psi_1,\ldots,\psi_{m-n})}=\{0\}$ となる.

この証明は残念ながら作用する群が簡約可能である場合にしか適用できない. 裏返し変換 (castling transformation) は G が一般の線形代数群の場合に成立するが, その詳細や証明については [6, p.37, Proposition 7] を参照されたい. 特に, [6] では裏返し変換を用いて表現が既約であるような概均質ベクトル空間の分類が与えられている.

4 今後の課題

放物型に限らず, 任意の概均質ベクトル空間が次数つき Lie 代数と関係があることが分かった. 本稿で紹介した理論は放物型概均質ベクトル空間理論の拡張になるわけだが, 最大の違いは最後に述べた裏返し変換が出来るかどうかである. 裏返し変換では正則性などの重要な性質が保存されるが, 放物型の裏返し変換がまた放物型になるとは限らない. 一方, 受け皿の次数つき Lie 代数を無限次元まで許容すれば裏返し変換は無限次元Lie 代数論の枠内で証明できるため, 概均質ベクトル空間のいくつかの性質は Lie 代数論で記述できると期待している. 特に, 概均質ベクトル空間の正則性を Lie 代数の言葉で記述できるかどうかは, 興味深い研究課題である.

また, Example 2.5 によって標準的な四つ組に付随する Lie 代数が有限次元半単純 Lie 代数のクラスを含んでいることが分かる. では, アフィン Lie 代数や一般の Kac-Moody Lie 代数を含んでいるだろうか. この問題に対する答はまだ得られていないが, 講演では最近の進歩状況についてお話したいと考えている.

References

[1] N. Bourbaki. Lie groups and Lie algebra. Springer, Berlin, 1989.

[2] H. Rubenthaler. Algèbres de Lie et espaces préhomogènes (Travaux en cours). Hermann, Paris, (1992).

[3] H. Rubenthaler. Graded Lie algebras associated to a representation of a quadratic algebra. arXiv:1410. 0031v3 (2015).

[4] N. Sasano. Lie algebras generated by Lie modules. Kyushu Journal of Mathematics. vol. 68, No. 2 (2014), 377–403.

[5] N. Sasano. Lie algebras associated with a standard quadruplets and prehomogeneous vector spaces. Tsukuba Journal of Mathematics. vol. 39, No. 1 (2015), 1–14.

[6] M. Sato and T. Kimura. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. Nagoya Mathematical Journal. vol. 65 (1977), 1–155.