グラフに付随したハイパー群

親木　翔平（Shohei OYANOKI） (奈良教育大学大学院)*

概　　要

有限ハイパー群とは, 有限群を拡張したものである. また, グラフとは, 頂点の集合と辺の集合からなる図形のことである. 本研究では, グラフから隣接行列などの代数的な道具を用いてハイパー群を構成することを行った. また, ハイパー群からグラフを構成することも行った. 本講演では, 有限群と有限ハイパー群との違いについて述べ, 具体例を交えながら, グラフからハイパー群を構成する方法について述べる.

1. はじめに

有限群を拡張した概念の一つとして, 有限ハイパー群が存在する. そのハイパー群の定義について述べ, 有限群がハイパー群であることの証明を行う. そして, いくつかの具体例を通してハイパー群の構成方法について述べる.

2. 有限ハイパー群とは

2.1. 記号の準備

まず, 有限ハイパー群について述べるために必要な記号の定義を行う.

定義 1 (algebra)**.** 空でない集合 A が次の性質を満たすとき, 集合 A は algebra であるという.

1. A は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である.
2. A に積が定義されている.
3. A 内の演算に対して, 分配法則を満たす.

定義 2 (対合 $-$)**.** algebra A に対して, 写像 $-$ を $- : A \to A$ とする. $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$(a+b)^- = a^- + b^-, \quad (\lambda a)^- = \lambda^{-1} a^-, \quad (ab)^- = b^- a^-, \quad (a^-)^- = a$$

を満たすとき, 写像 $-$ を対合という. ただし, λ^{-1} は λ の複素共役を表す.

定義 3 (involutive algebra)**.** 空でない集合 A が次の性質を満たすとき, 集合 A は involutive algebra であるという.

1. A が algebra である.
2. A に対合 $-$ が定義されている.

定義 4 (台 (support))**.** 集合 $X = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ があり, $\mu = a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n (a_i \in \mathbb{C}, c_i \in X)$ に対して, μ の台 (support) を表す $\mathrm{supp}(\mu)$ を

$$\mathrm{supp}(\mu) := \{c_j \ ; \ a_j \neq 0\}$$

と定義する.

キーワード：ハイパー群, グラフ

*e-mail: a153302@student.nara-edu.ac.jp

2.2. 有限ハイパー群の公理

比較のために有限群の定義をまず以下に示す.

定義 5 (有限群)**.** 有限集合 $G = \{g_0, g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ に対して, 二項演算 $\circ : G \times G \to G$ が定義されており, 以下の条件を満たすとする. このとき, $G = (G, \circ)$ を群という.

- $g_i \circ g_j = g_k \in G$ (演算に関して閉じている).
- $g \in G$ に対して, $g \circ e = e \circ g = g$ となる $e \in G$ の存在.
- $g \in G$ に対して, $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ となる $g^{-1} \in G$ の存在.
- $g_i, g_j, g_k \in G$ に対して, $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ が成立.

そして, 有限ハイパー群は次のように定義されている.

定義 6 (有限ハイパー群, Generalized fusion rule algebra)**.**
有限集合 $K := \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ に対して,

$$\mathbb{C}K := \{\mu = \sum_{k=0}^{n} a_k c_k,\ a_k \in \mathbb{C}\}$$

とおく. 次の二つの演算, convolution $\circ : \mathbb{C}K \times \mathbb{C}K \to \mathbb{C}K$, involution $* : \mathbb{C}K \to \mathbb{C}K$ があり, $\mathcal{K} := (K, \mathbb{C}K, \circ, *)$ が次の条件を満たすとする. このとき $\mathcal{K} := (K, \mathbb{C}K, \circ, *)$ をハイパー群という.

1. $\mathbb{C}K$ は結合律を満たす involutive algebra である.
2. $c_i \circ c_j = \sum_{k=0}^{n} a_{ij}^k c_k$
3. c_0 は単位元
4. $c_i^* = c_j \Leftrightarrow c_0 \in \mathrm{supp}(c_i \circ c_j)$
5. $a_{ij}^k \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{k=0}^{n} a_{ij}^k = 1$

また, 最後の条件を $a_{ij}^k \in \mathbb{Z}^+$ に置き換えたとき, $\mathcal{K}$ を Generalized fusion rule algebra といい特に, $\mathcal{F}$ と表す. ただし, $\mathbb{R}^+ := \{r | r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$, $\mathbb{Z}^+ := \{m | m \in \mathbb{Z}, m \geq 0\}$ である.

注 1. この定義は, ハイパー群は有限群とは異なり, 集合 K 内には演算は定義されておらず, $\mathbb{C}K$ 内での演算を考えるということを意味している. また, 公理の $2, 3, 4$ はそれぞれ, 有限群の公理における, 演算に関して閉じているかどうか, 単位元の存在性, 逆元の存在性に対応している.

注 2. ハイパー群 $\mathcal{K}$ は本来 $(K, \mathbb{C}K, \circ, *)$ の四つ組で構成されるが, 記述を省略して, $\mathcal{K} = \{c_0, c_1, c_2\}$ がハイパー群である. といった形で記すことがある.

ここで, ハイパー群が群の拡張になっていることを確かめる.

定理 1 (有限群はハイパー群である)**.** 任意の有限群は有限ハイパー群である.

証明. 群 $G = (G\ ,\ \cdot)$ を考える. ただし G は, $G = \{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ とし g_0 は G の単位元. さらに, g_i , $g_j \in \mathbb{C}G$ に対して, convolution $\circ$ を

$$g_i \circ g_j := g_i \cdot g_j = g_k\ (0 \leq k \leq n)$$

と定める. さらに, involution $*$ を, $(g_i)^* := (g_i)^{-1}$ とする. これより, $\mathcal{G} = (G, \mathbb{C}G, \circ, *)$ がハイパー群の公理を満たしていることを確認する.

1. $\mathbb{C}G$ は結合律を満たす involutive algebra であることについて.
   これは $\mathbb{C}G$ の定義, 群が結合律を満たすことから確かめられる.

2. $g_i \circ g_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{ij}^k g_k$ について

$$g_i \circ g_j = g_i \cdot g_j = g_k \quad (0 \leq k \leq n)$$

   となる. また,

$$g_k = 0 \times g_0 + 0 \times g_1 + \cdots + 0 \times g_{k-1} + 1 \times g_k + 0 \times g_{k+1} + \cdots + 0 \times g_n$$

   と表されるので, 満たしていることがわかる.

3. g_0 は単位元. これは G が群であることから明らかである.

4. $g_i^* = g_j \Leftrightarrow g_0 \in \mathrm{supp}(g_i \circ g_j)$ について

   (a) $\Leftarrow$ について
   $g_i \circ g_j = g_k \quad (0 \leq k \leq n)$ と表されることに注意して証明を行う.

$$\begin{aligned} & g_0 \in \mathrm{supp}(g_i \circ g_j) \\ \Rightarrow & g_0 \in \mathrm{supp}(g_k) \\ \Rightarrow & g_0 \in \{g_k\} \\ \Rightarrow & g_0 = g_k \\ \Rightarrow & g_0 = g_i \cdot g_j \\ \Rightarrow & g_i^{-1} = g_j \\ \Rightarrow & g_i^* = g_j \end{aligned}$$

   (b) $\Rightarrow$ について
   これは, 上記の議論は遡っていくことが可能であるため, 成立していることがわかる.

5. $a_{ij}^k \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{ij}^k = 1$ について
   $g_k = 0 \times g_0 + 0 \times g_1 + \cdots + 0 \times g_{k-1} + 1 \times g_k + 0 \times g_{k+1} + \cdots + 0 \times g_n$ であり, その係数の和が明らかに 1 であるから, この公理も満たしていてる

以上をもって, 有限群が有限ハイパー群であることが証明できた. □

3. グラフからハイパー群の構成

ハイパー群を構成する方法は複数存在する. その中でも比較的単純な方法である, 隣接行列を用いて構成することについて述べる. そのための準備をいくつか行う.

定義 7 (隣接行列)**.** 頂点数が n のグラフ G に対して, 頂点 v_i と v_j を結ぶ辺の数を a_{ij} としたとき, a_{ij} を要素とする $n \times n$ 行列 $A(G) = (a_{ij})$ を G の隣接行列という. 有向グラフの場合は, a_{ij} は始点 v_i , 終点 v_j を持つ弧の個数とする.

注 3. この定義からもわかるように, 隣接行列はグラフ G の頂点のラベルのつけ方に依存している.

3.1. 正 n 角形のグラフの場合

得られている結果は次の通りである.

定理 2 (正 m 角形のグラフに付随したハイパー群)**.** 正 m 角形 D_m の隣接行列から得られるハイパー群を $\mathcal{K}(D_m)$ とする. $\mathcal{K}(D_m)$ の位数は $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ である. また, その構造式は正 $2m$ $(m = 1, 2, 3 \ldots, n)$ 角形の場合は, 次の式 (1) のようになり,

$$\begin{aligned} c_i c_j = c_j c_i &= \frac{1}{2} c_{|i-j|} + \frac{1}{2} c_{i+j} \ (1 \leq i\ ,\ j \leq n-1) \\ c_n c_i = c_i c_n &= c_{n-i} \ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1}$$

正 $2m+1$ $(m = 1, 2, 3 \ldots, n)$ 角形の場合は, 次の式 (2) のようになる.

$$\begin{aligned} c_i c_j = c_j c_i &= \frac{1}{2} c_{|i-j|} + \frac{1}{2} c_{i+j} \ (1 \leq i\ ,\ j \leq n-1) \\ c_n c_i = c_i c_n &= \frac{1}{2} c_{|n+1-j|} + \frac{1}{2} c_{|m-j|} \ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2}$$

このハイパー群を構成した方法は次の通りである.

1. グラフから隣接行列 Y_1 を生成する.
2. 隣接行列から, Generalized fusion rule algebra を得る.
3. その Generalized fusion rule algebra の各元を次元関数で割る.

なお, 次元関数の定義は以下のようなものになる.

定義 8 (次元関数)**.** Generalized fusion rule algebra $\mathcal{F}$ に対して, $d : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ となる準同形写像を次元関数という. ただし, $\mathcal{F}$ の単位元 e に対しては, $d(e) = 1$ である.

次に, いくつかの例を示す.

3.2. 正三角形の無向グラフ

最も単純な正三角形の無向グラフについて考える. まず, 手順 1 を実行する. 隣接行列の定義より,

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2Y_0 + Y_1$$

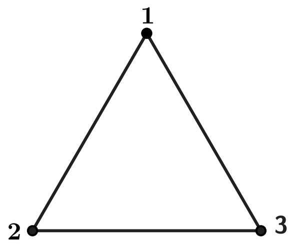


図 **1:** 正三角形の無向グラフ

よって, $\mathcal{F} := \{Y_0, Y_1\}$ とすると, これは Generalized fusion rule algebra になる. その構造式は次のようになる.

$$Y_1^2 = 2Y_0 + Y_1, \quad Y_0Y_1 = Y_1Y_0 = Y_1$$

次に, 手順 2 を実行する. 今得られた, $Y_1^2 = 2Y_0 + Y_1$ の両辺を写像 d で写す. 次元関数の定義より, $d(Y_0) = 1$ であるから, 求めたい次元関数 (の値) $d(Y_1)$ を x とおく.

$$d(Y_1^2) = d(2Y_0 + Y_1)$$

写像 d が準同形であることより, $d(Y_1) = -1, 2$. 写像 d の値域が $\mathbb{R}^+$ であることから, $d(Y_1) = 2$. 次に手順 3 を実行する. つまり, 集合 $\mathcal{F}$ の各元を次元関数 (の値) で割る. したがって, 各元は次のようになる.

$$c_0 := \frac{1}{d(Y_0)}Y_0 = Y_0, \quad c_1 := \frac{1}{d(Y_1)}Y_1 = \frac{1}{2}Y_1$$

そして, 手順 2 で得られた関係式を用いると,

$$c_1^2 = \frac{1}{2}Y_1\frac{1}{2}Y_1 = \frac{1}{4}Y_1^2 = \frac{1}{4}(2Y_0 + Y_1) = \frac{1}{2}Y_0 + \frac{1}{4}Y_1 = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1$$

したがって, $\mathcal{K} := \{c_0, c_1\}$ とすると, これは位数 2 のハイパー群であり, $K \cong \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}(2)$ である. そして, その構造式は,

$$c_1^2 = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1, \quad c_0c_1 = c_1c_0 = c_1$$

である. ただし, $\mathbb{Z}_q(2)$ とは, 位数が 2 のハイパー群であり, 以下の構造式をもつものである.

$$c_1^2 = qc_0 + (1-q)c_1 \quad (0 < q \leq 1)$$

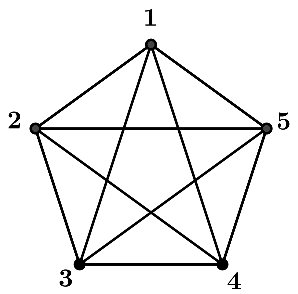
これが正三角形の無向グラフから得られるハイパー群である.

3.3. 完全グラフ K_n

まず, 定義を述べる. なお, 下の図 2 に示すのは, $n = 5, 6$ の場合である.

定義 9 (完全グラフ)**.** 完全グラフとは, n 個の頂点を互いにすべて辺で結んだグラフであり, K_n と表す.

これより, 次の定理を証明する.



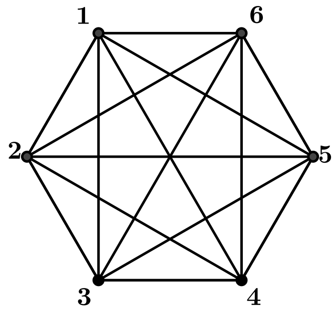


図 **2:** 完全グラフ K_5, K_6

定理 3 (完全グラフ K_n に付随したハイパー群)**.** 完全グラフ K_n から, ハイパー群が得られ, $\mathcal{K} = \{c_0, c_1\} \cong \mathbb{Z}_{\frac{1}{n-1}}(2)$ となる. そしてその構造式は以下のようになる.

$$c_1^2 = \frac{1}{n-1}c_0 + \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)c_1, \quad c_1c_0 = c_0c_1 = c_1$$

証明. このとき, グラフは, すべての頂点が自分自身以外とは 1 本ずつ接続されているので, 隣接行列 Y_1 は対角成分が 0 であり, それ以外の成分は 1 となる. したがって, Y_1^2 は, 対角成分が $n-1$, それ以外の成分はすべて $n-2$ となる. つまり,

$$Y_1^2 = (n-1)Y_0 + (n-2)Y_1 \tag{3}$$

の関係が成り立つ. したがって, $\mathcal{F} := \{Y_0, Y_1\}$ とするとこれは Generalized fusion rule algebra となる. ここから次元関数を用いてハイパー群を構成する. $d(Y_1) = x \in \mathbb{R}^+$ とおく. 式 (3) より, $d(Y_1) = n-1$ となる. そして,

$$c_0 := \frac{1}{d(Y_0)}Y_0 = Y_0,\ c_1 := \frac{1}{d(Y_1)}Y_1 = \frac{1}{(n-1)}Y_1$$

とし, c_1^2 を計算する.

$$\begin{aligned}
c_1^2 = \frac{1}{(n-1)^2}Y_1^2 &= \frac{1}{(n-1)^2}((n-1)Y_0 + (n-2)Y_1) \\
&= \frac{1}{(n-1)^2}((n-1)c_0 + (n-1)(n-2)c_1) \\
&= \frac{1}{(n-1)}(c_0 + (n-2)c_1) \\
&= \frac{1}{n-1}c_0 + \frac{n-2}{n-1}c_1 \\
&= \frac{1}{n-1}c_0 + \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)c_1
\end{aligned}$$

よって, $\mathcal{K} := \{c_0, c_1\}$ とすると, これはハイパー群となり, $\mathcal{K} \cong \mathbb{Z}_{\frac{1}{n-1}}(2)$ である. その構造式は,

$$c_1^2 = \frac{1}{n-1}c_0 + \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)c_1, \quad c_1c_0 = c_0c_1 = c_1$$

である. 以上により定理が示された. □

3.4. A_n **型のディンキン図形に付随したハイパー群**

次に, A_n ディンキン図形から得られるハイパー群を述べる. A_n ディンキン図形の定義は以下の通りである.

定義 10 (A_n ディンキン図形)**.** n 個の頂点と $n-1$ 本の辺を直鎖状に連結させたグラフを A_n 型ディンキン図形という.

3.5. A_3 **型ディンキン図形**

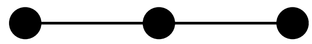


図 3: A_3 型ディンキン図形

これまでと同様に考えると

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで, Y_2 を次のように定義する.

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すると, $Y_1^2 = Y_0 + Y_2$ となる. そして, $Y_2^2 = Y_0$ であるから, 以上の結果をまとめると, 表 1 を得る.

表 1: A_3 型ディンキン図形に付随した Fusion rule algebra の演算表

	Y_0	Y_1	Y_2
Y_0	Y_0	Y_1	Y_2
Y_1	Y_1	$Y_0 + Y_2$	Y_1
Y_2	Y_2	Y_1	Y_0

したがって, $\mathcal{F} := \{Y_0, Y_1, Y_2\}$ と定義すれば, これは Generalized fusion rule algebra である. ここからハイパー群を構成する. これまでと同じようにすることもできるが, 次元関数の求め方には複数あるため, 今回は隣接行列 Y_1 の最大固有値 λ_{max} の固有ベクトルを利用して構成する.

$$\det(Y_1 - \lambda E) = -\lambda^3 - (-\lambda - \lambda) = \lambda(\sqrt{2} + \lambda)(\sqrt{2} - \lambda)$$

したがって,

$$\lambda_{max} = \sqrt{2} \quad \left(= 2\cos\frac{1}{3+1}\pi \right)$$

である. これよりこの固有値に対する固有ベクトルを求めると, $\boldsymbol{x}$ は, 任意定数 $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ を用いて,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. ここで,

$$c_0 := \frac{1}{x}Y_0 = Y_0,\ c_1 := \frac{1}{y}Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1,\ c_2 := \frac{1}{z}Y_2 = Y_2$$

とする. これらに対して, c_1^2 や c_2^2 などを計算すると,

$$c_1^2 = \frac{1}{2}Y_1^2 = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_2) = \frac{1}{2}(c_0 + c_1) = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1$$

$$c_1c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1 = c_1,\ c_2c_1 = Y_2\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_2Y_1 = c_1,\ c_2^2 = Y_2^2 = Y_0 = c_0$$

が得られる. したがって, $\mathcal{K} := \{c_0, c_1, c_2\}$ とすると, これはハイパー群となり, 構造式をまとめると, 次の表 2 のようになる.

表 2: A_3 型ディンキン図形に付随したハイパー群 の演算表

	c_0	c_1	c_2
c_0	c_0	c_1	c_2
c_1	c_1	$\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1$	c_1
c_2	c_2	c_1	c_0

これが, A_3 型ディンキン図形から得られるハイパー群である.

4. おわりに

今回はハイパー群を構成する方法に焦点を当てて述べてきた. さらに, その構成方法についても主に隣接行列について述べてきた. したがって, 今後の課題としてハイパー群からグラフを構成する方法の確立であったり, ハイパー群が得られるグラフとそうでないグラフの幾何学的意味を明らかにすることであったりが挙げられる.

参考文献

[1] S. Kawakami, M. Sakao, T. Tsurii and S. Yamanaka: Signed Actions of Finite Hypergroups and the Extension Problem, Bull. Nara Univ. Educ., Vol. 61(2012), No. 2, 13-24.

[2] F.M.Goodman, P.de la Harpe, V.F.R.Jones, "Coxeter Graphs and Towers of Algebras" , Springer-Verlag,1989

[3] 小林俊行・大島利雄, Lie 群と Lie 環 , 1 , 岩波講座現代数学の基礎, 岩波書店, 1999 年

[4] 斎藤正彦, 線型代数入門, 基礎数学, 1, 東京大学出版会, 1966 年

[5] 高橋恒郎, ベクトルと行列, 数学講座, 4, 筑摩書房, 1970 年

[6] 立花俊一・奈良知恵・田澤新成共訳, j.A.Bondy & U.S.R.Murty 著, グラフ理論への入門, 共立出版株式会社, 1991 年

[7] 仁平政一・西尾義典, グラフ理論序説, プレアデス出版, 2010 年

[8] 渡辺敬一, 環と体, 講座＜数学の考え方＞, 12 , 朝倉書店, 2002 年