Ohno-type relation for finite multiple zeta values

小山 宏次郎（Kojiro OYAMA）
九州大学大学院数理学府数理学専攻

1　序文

多重ゼータ値（Multiple Zeta Value, MZV）とは, $k_i \in \mathbb{N}, k_1 \geq 2$ に対して

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \in \mathbb{R}$$

で定義される実数である. 今回はその類似物として, 素数 p を固定して, MZV の和を p の手前で打ち切った有限和

$$\zeta_p(\mathbf{k}) = \zeta_p(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{p > m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \bmod p$$

について考える.（有限和であるので, $k_1 \geq 1$ で良い.） これは "mod p multiple harmonic sum" と呼ばれ, Hoffman や Zhao 等によって研究されていた対象である. そして, 近年 Zagier が固定された素数 p でなく, 全ての素数 p に対してこの和を同時に考える枠組みを提唱した. 本稿では, Zagier の提唱した枠組によって与えられる有限多重ゼータ値 (Finite Multiple Zeta Value, FMZV) について, その定義と次元予想について紹介したうえで, 主結果について説明をする.

1.1　定義, 次元予想

集合 $\mathcal{A}$ を次で定義する.

$$\mathcal{A} := \left(\prod_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right) \Bigg/ \left(\bigoplus_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right) = \{(a_p)_p \mid a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}/\sim,$$

ここで $(a_p)_p \sim (b_p)_p$ は, 高々有限個を除く全ての素数 p に対して $a_p = b_p$ が成立することを意味する. $\mathcal{A}$ は成分ごとの演算によって和と積を入れることにより, 自然に環になる. また, $\mathcal{A}$ の元は $(a_p)_p$ のように書かれるが, 有限個の a_p に対しては定義されていない場合がある. その場合は適当に有限個の a_p に対して値を定めてやることで, 値の定め方に依らずに $(a_p)_p$ は定義される. さらに, 対角線写像

$$\mathbb{Q} \ni r \longmapsto (r \bmod p)_p \in \mathcal{A}$$

を考えると, r の分子を割り切る素数は有限個しかないことから, この写像は単射準同型であることが従い, $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Q}$ 代数になることがわかる.

このとき $\mathcal{A}$ の元として, 有限多重ゼータ値は次のように定義される.

定義 1.1. 任意のインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ に対して, 有限多重ゼータ値を

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r) := (\zeta_p(k_1, \ldots, k_r))_p \in \mathcal{A}$$

で定義する.

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対して, $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) := k_1 + \cdots + k_r$, $\mathrm{dep}(\mathbf{k}) := r$ をそれぞれ重さ, 深さと呼ぶ. また, $\mathbf{k}^\vee$ を $\mathbf{k}$ の Hoffman's dual といい, 各 k_i をすべて $1 + \cdots + 1$ の形で書いたときに, カンマ「 , 」をプラス「+」に, プラス「+」をカンマ「 , 」に取り換えたときに得られるインデックスを表している. 例えば,

$$(k)^\vee = (1, \ldots, 1), \quad (2,3,1,2)^\vee = (1,2,1,3,1)$$

等である. Hoffman's dual と元のインデックスは,

$$\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = \mathrm{wt}(\mathbf{k}^\vee),\ \mathrm{dep}(\mathbf{k}) + \mathrm{dep}(\mathbf{k}^\vee) = \mathrm{wt}(\mathbf{k}) + 1$$

の関係にある.

有限多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を次のように定義する.

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} := \mathbb{Q}, \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} := \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ r\geq 1, k_i \geq 1}} \mathbb{Q} \cdot \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r)$$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}.$$

特に, $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ は $\mathbb{Q}$ 代数となっている. このとき, Zagier によって次の次元予想が予想された.

予想 1.2 (Zagier [6])**.** 数列 $\{d_k\}_{k\geq 0}$ を

$$\begin{aligned} &d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, \\ &d_k = d_{k-2} + d_{k-3} \quad (k \geq 3) \end{aligned}$$

で定めたとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} = d_k - d_{k-2}.$$

この予想に関する著しい結果として次の定理が挙げられる:

定理 1.3 (Akagi-Hirose-Yasuda, Jarossay)**.**

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \leq d_k - d_{k-2}.$$

この定理により, FMZV には多くの線形関係式が存在することがわかる.（重さ k のインデックスが 2^{k-1} だけあることに注意すると, 重さ k ごとに, 少なくとも $2^{k-1} - (d_k - d_{k-2})$ 個の線形関係式が存在することが言える.） そこで, FMZV の関係式を具体的に記述するという素朴だが重要な問題が考えられる.

2　代数的定式化

この節では, Hoffman[3] により導入された MZV の代数的定式化にならって, FMZV の代数的定式化を行う.

2 変数非可換多項式環 $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ の部分環 $\mathfrak{H}^1$ を

$$\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$$

とおく．また, 任意の word $w \in \mathfrak{H}$ に対して, w の次数を w の重さと呼ぶ ($|w|$ と書く). 自然数 k に対して $z_k := x^{k-1}y$ とおき, $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z_{\mathcal{A}} : \mathfrak{H}^1 \longrightarrow \mathcal{A}$ を,

$$Z_{\mathcal{A}}(1) = (1)_p, \quad Z_{\mathcal{A}}(z_{k_1} \cdots z_{k_r}) = \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r)$$

を $\mathbb{Q}$-線形に拡張したものとする.

$\mathfrak{H}^1$ 上の積 $*$（調和積）を次の規則と双線形性により定義する:
(i) 任意の word $w \in \mathfrak{H}^1$ 対し, $w * 1 = 1 * w = w$.
(ii) 任意の words $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ と $m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$z_m w_1 * z_n w_2 = z_m(w_1 * z_n w_2) + z_n(z_m w_1 * w_2) + z_{m+n}(w_1 * w_2).$$

調和積と同様に, $\mathfrak{H}$ 上の積 ш（シャッフル積）を次の規則と双線形性により定義する:
(i) 任意の word $w \in \mathfrak{H}$ に対し, $w \,\text{ш}\, 1 = 1 \,\text{ш}\, w = w$.
(ii) $u_1, u_2 \in \{x, y\}$ と任意の words $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$ に対し

$$(u_1 w_1) \,\text{ш}\, (u_2 w_2) = u_1(w_1 \,\text{ш}\, u_2 w_2) + u_2(u_1 w_1 \,\text{ш}\, w_2).$$

今定義したこれらの積は, 結合的で可換な積であることが知られている. (cf: [3, 8]). また, これらの積は次の性質を満たす:

命題 2.1 ([3, 5, 6])**.** 任意の *words* $w = z_{k_1} \cdots z_{k_r}, w' = z_{k'_1} \cdots z_{k'_s} \in \mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad Z_{\mathcal{A}}(w * w') = Z_{\mathcal{A}}(w) Z_{\mathcal{A}}(w') \\ &\text{(ii)} \quad Z_{\mathcal{A}}(w \,\text{ш}\, w') = (-1)^{|w|} Z_{\mathcal{A}}(z_{k_r} \cdots z_{k_1} z_{k'_1} \cdots z_{k'_s}). \end{aligned}$$

が成立する.

3　主結果

3.1　Ohno-type relation

本稿の主結果は次の関係式である.

定理 3.1 (O. [7])**.** 任意のインデックス $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r$ と任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対して,

$$\sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{N}_0^r \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}) = n}} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} + \mathbf{e}) = \sum_{\substack{\mathbf{e}' \in \mathbb{N}_0^s \\ \mathrm{wt}(\mathbf{e}') = n}} \zeta_{\mathcal{A}}((\mathbf{k}^\vee + \mathbf{e}')^\vee)$$

が成立する. ここで, $s = \mathrm{dep}(\mathbf{k}^\vee)$ である.

この関係式は, Ohno's relation と呼ばれる MZV の関係式の FMZV 版として, Kaneko によって予想されたものである. また, $n=1$ の場合は Ihara が直接計算により示している.

主結果の証明（詳しくは [7] を参照されたい.）は n に関する帰納法を用いるのだが, そのためには次の補題が必要になる.

補題 3.2. 任意のインデックス $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}^r$ と任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{i=0}^{\min\{n,r\}}\left((-1)^i\sum_{\substack{\boldsymbol{\lambda}\in\{0,1\}^r\\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{\lambda})=i}}\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbb{N}_0^{s+i}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{e})=n-i}}\zeta_{\mathcal{A}}\left(((\mathbf{k}+\boldsymbol{\lambda})^\vee+\mathbf{e})^\vee\right)\right)=0$$

が成立する. ここで, $s=\mathrm{dep}(\mathbf{k}^\vee)$ である.

この補題自体は, 命題 2.1 を用いることによって, 次の命題から得られる.

命題 3.3 (Ihara-Kaneko-Zagier [4])**.** 任意の *word* $w\in\mathfrak{H}^1$ に対して,

$$\frac{1}{1-yu}*w=\frac{1}{1-yu}ш\,\Delta_u(w)$$

が成立する. ここで Δ_u は $\widehat{\mathfrak{H}}$（$\mathfrak{H}$ の完備化）の自己同型で,

$$\Delta_u(x)=x(1+yu)^{-1},\quad \Delta_u(y)=y+x(1+yu)^{-1}yu$$

で与えられる. また, u は形式的パラメータである.

3.2 Sum formula

主結果の特殊化として次の関係式が得られる.

定理 3.4 (Saito-Wakabayashi [9])**.** $1\le i\le r\le k-1$ を満たす任意の $k,r,i\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ \forall k_j\ge1,k_i\ge2}}\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r)=(-1)^{i-1}\left(\binom{k-1}{i-1}+(-1)^r\binom{k-1}{r-i}\right)\mathfrak{Z}(k)$$

が成立する.

この定理は, Sum formula と呼ばれる MZV の有名な関係式の FMZV 版として, $i=1$ の場合が Kaneko に予想されていたもので, Saito と Wakabayashi によって一般の場合が証明された. 導出方法について, ここでは詳しいことを述べないが,

$$\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1},2,\underbrace{1,\ldots,1}_{r-i}),\quad \mathbf{k}^\vee=(i,r+1-i)$$

というインデックスに対して, 主結果を計算すれば良い.

Sum formula 以外にも, 主結果の特殊化として関係式が何か得られるだろうか.

参考文献

[1] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, Pacific J. Math. **152** (1992), 275–290.

[2] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums, Kyushu J. Math., to appear.

[3] M. E. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[4] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compositio Math. **142** (2006), 307-338.

[5] M. Kaneko, Finite multiple zeta values. (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu, to appear.

[6] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.

[7] K. Oyama, Ohno's relation for finite multiple zeta values, preprint, arXiv:1506.00833

[8] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford Science Publications, 1993.

[9] S. Saito and N. Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, J. Math. Soc. Japan, to appear.