

有限体係数のローラン級数におけるディオファントス近似

大音 智弘 (Tomohiro Ooto)*

筑波大学 数理物質科学研究科数学専攻[†] 博士後期課程二年

概要

ディオファントス近似は、実数を有理数でどのくらい良く近似できるかを基本的な問題とし、その問題の拡張や類似について主に調べる分野である。この近似理論は、超越数論やディオファントス方程式への応用があり古くから研究の対象となってきた。本テクニカルレポートでは、実数に関するディオファントス近似の先行研究とその応用について述べる。その後、実数の類似として有限体係数のローラン級数でのディオファントス近似について得られた結果を紹介する。

1 導入

ディオファントス近似は、

与えられた実数 ξ を有理数でどのくらい良く近似できるか

を基本的な問題とし、その問題の拡張や類似について主に調べる分野である。もちろん有理数の稠密性から、いくらでも ξ との差が小さい有理数は存在する。しかし、この差の測り方(ものさし)をうまく変えることで面白いことがわかってくる。そこで、この節ではそのものさしについて簡単な場合を通してイメージを掴んでもらいたい。

まず、一つ記号を導入する。実数 x に対して、 $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ と定める。この関数 $[\cdot]$ はガウス記号とよばれており、実数の整数部分を取り出す関数である。例えば、 $[3] = 3$, $[5.3] = 5$, $[-6.25] = -7$ 。整数 $q \neq 0$ に対して、 $|q\xi - [q\xi]| \leq 1$ なので両辺を $|q|$ で割ると、

$$\left| \xi - \frac{[q\xi]}{q} \right| \leq \frac{1}{|q|}$$

が成り立つ。従って、実数は近似有理数の分母で近似できる。次に、 ξ が有理数 a/b のときについて考える。このとき、 a/b と異なる有理数 p/q に対して、

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{|aq - bp|}{|bq|} \geq \frac{1}{|bq|}$$

が成り立つ。上記と合わせると、有理数は近似有理数の分母がある意味最良の近似となる。

次に考えるべきことは、 ξ が無理数のときの近似であろう。無理数については次の古典的な結果がある。

*e-mail: ooto@math.tsukuba.ac.jp

[†]〒 305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数理物質系数域

定理 1.1 (Dirichlet, 1842). 実数 ξ を無理数とする. このとき, 次を満たす有理数 p/q が無数に存在する:

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{|q|^2}.$$

定理 1.1 の証明は, 鳩ノ巣原理 ($n+1$ 羽の鳩を n 個の箱に入れると, 少なくとも 1 個の箱には 2 羽以上の鳩がいる) を用いて初等的に証明できる. 証明は, [15, 第 1 章] に書いてある. 定理 1.1 から, 無理数は近似有理数の分母の 2 乗で近似できる.

以上のことから, 近似有理数の分母の 2 乗で近似できれば無理数, そうでない数は有理数となる. つまり, 有理数か無理数かを判定するのに方程式 (等式) でなく不等式が使えるところが非常に面白い点である.

2 節では, 先ほど未定義で使った最良近似の概念を定式化し, それに関する先行研究を紹介する. 次の 3 節では, 超越数やディオファントス方程式への最良近似の応用について述べる. 4 節は, 有理数での近似を一般化した代数的数や整数係数多項式での近似について述べる. 5 節では, 実数でなく別の体 (有限体係数のローラン級数体) の近似について簡単な紹介を行い, 今回の主結果を報告する.

2 実数の有理数近似

まずは, 前節で未定義だった実数の最良近似を定義する. 実数 ξ に対して,

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{|q|^w}$$

となる有理数 p/q が無数に存在するような実数 w の上限を $\mu(\xi)$ とし, これを ξ の無理数度とよぶ. これで, 有理数の分母というものさしを使った最良近似を定式化することができた. 無理数度の言い換えとして次が成立することが知られている. 以下を満たす実数 w の下限は $\mu(\xi)$ となる: ある正の実数 C が存在して, ξ と異なるすべての有理数 p/q に対して,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{|q|^w}$$

を満たす. 従って, 前節から実数 ξ に対して $\mu(\xi) \geq 1$, 有理数 a/b に対して $\mu(a/b) = 1$ が成立する. また, 定理 1.1 を言い換えると次のようになる:

定理 2.1 (Dirichlet, 1842). 無理数 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して, $\mu(\xi) \geq 2$.

従って, 前節の最後の方に述べた有理数か無理数の判定法は,

$$\mu(\xi) > 1 \text{ ならば } \xi \text{ は無理数で, そうでないとき } (\mu(\xi) = 1), \xi \text{ は有理数}$$

となる.

複素数 ξ は, $P(\xi) = 0$ となる整数係数多項式 $P(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ が存在するとき代数的数という. 複素数で代数的数となる数全体の集合を $\overline{\mathbb{Q}}$ と表す. ξ が代数的数のとき, $P(\xi) = 0$ となる $P(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ のうち最小の次数を ξ の次数とよび, $\deg \xi$ で表す. また, 代数的数でない複素数を超越数とよぶ. ここで, いくつか代数的数と超越数の例を挙げる.

例. 有理数は次数 1 の代数的数. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ は次数 2 の代数的数. ネイピア数 e と円周率 π は超越数.

Liouville は代数的数の無理数度の上限を与えた.

定理 2.2 (Liouville [7, 8]). 次数 d の代数的数 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して, $\mu(\xi) \leq d$.

Proof. 他のディオファントス近似の定理でもそうだが, この定理の証明のポイントは 0 でない整数の絶対値は 1 以上ということである.

p/q を ξ と異なる有理数とする. $|\xi - p/q| > 1$ のときは,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > 1 \geq \frac{1}{|q|^d}$$

となる. 次に, $|\xi - p/q| \leq 1$ のときを考える. $P(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ で $P(\xi) = 0$ なるものをとってくる. この多項式を $X = \xi$ まわりでテーラー展開すると,

$$P(X) = \sum_{n=0}^d \frac{P^{(n)}(\xi)}{n!} (X - \xi)^n$$

となる. $P^{(0)}(\xi) = 0$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^d \frac{P^{(n)}(\xi)}{n!} \left(\frac{p}{q} - \xi\right)^n \right| \leq \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \sum_{n=1}^d \frac{|P^{(n)}(\xi)|}{n!} \left| \frac{p}{q} - \xi \right|^{n-1} \\ &\leq \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \sum_{n=1}^d \frac{|P^{(n)}(\xi)|}{n!}. \end{aligned}$$

また, 0 でない整数の絶対値は 1 以上なので

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{\sum_{n=0}^d a_n p^n q^{d-n}}{q^d} \right| \geq \frac{1}{|q|^d}.$$

ここで, $C := \min\{1, (\sum_{n=1}^d |P^{(n)}(\xi)|/n!)^{-1}\}$ とおく. すると, ξ と異なる任意の有理数 p/q に対して,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{|q|^d}$$

となるので, $\mu(\xi) \leq d$ が得られる. □

Liouville によって得られた d という上界は, その後 $d/2 + 1$ (Thue [18]), $2\sqrt{d}$ (Siegel [16]), $\sqrt{2d}$ (Dyson [6]) と更新され, 最終的に Roth の手によって決着がついた.

定理 2.3 (Roth [12]). 実数 ξ が 2 次以上の代数的数とする. このとき, $\mu(\xi) \leq 2$. 従って, 定理 2.1 と合わせると,

$$\mu(\xi) = 2.$$

定理 2.3 の証明が書いてある和書としては, [15, 第 3 章] が挙げられる. 定理 2.3 の対偶を考えることで, 次の超越数判定が得られる.

系 2.4. 実数 ξ に対して, $\mu(\xi) > 2$ ならば ξ は超越数.

3 実数の有理数近似の応用

この節では、第2節で述べた定理の応用について幾つか紹介する。まずは、超越数論への応用を紹介したい。

定理 3.1 (Mahler [9]). b を 2 以上の整数とし、 k を 3 以上の整数とする。このとき、次の実数は超越数:

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{k^n}}.$$

注意. Mahler は Roth の定理を用いない方法で示したが、ここでは Roth の定理を使った証明を与える。

Proof. 系 2.4 より、 $\mu(\xi) > 2$ を示せば良い。そのため、 ξ に良い近似を与える有理数を構成する。整数 $m \geq 0$ に対して、

$$\xi_m := \sum_{n=0}^m \frac{1}{b^{k^n}} = \frac{1 + b^{k^m - k^{m-1}} + b^{k^m - k^{m-2}} + \dots + b^{k^m - 1}}{b^{k^m}}$$

と有理数を定める。このとき、

$$|\xi - \xi_m| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{b^{k^n}} \right| \leq \frac{2}{(b^{k^m})^k}.$$

従って、 $\mu(\xi) \geq k > 2$ となるため ξ は超越数となる。 □

定理 3.2 (Danilov [5]). $\alpha > 1$ を無理数とする。このとき、次の実数は超越数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{[\alpha n]}}.$$

この定理の証明も、定理 3.1 の証明と同じく良い有理数近似を構成して系 2.4 から超越性を示すという方針である。次に、ディオファントス方程式への応用を一つ述べる。

定理 3.3 (Thue [18]). d を 3 以上の整数とし、 $F(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ を既約な d 次斉次多項式とする。また、 k を整数とする。このとき、不定方程式

$$F(X, Y) = k \tag{1}$$

の整数解 $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$ は有限個しか存在しない。

注意. この定理は、前節で紹介した Roth の定理より弱い Thue の定理 ($\mu(\xi) \leq d/2 + 1$) を用いて Thue 自身が証明した。

例. $2X^3 - Y^3 = 1$ の整数解 $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$ は有限個のみ。

4 有理数近似の一般化

この節では、無理数度の概念を一般化しそれについて知られていることを紹介する。一般化をするために、まずは多項式および代数的数の高さを定義する。整数係数多項式 $P(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ に対して、 $H(P) := \max_{0 \leq n \leq d} |a_n|$ を P の高さおよび。代数的数 $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対して、 ξ の最小多項式を $Q(X)$ とおく。つまり、既約かつ原始的で最高次係数が正となる $Q(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ で $Q(\xi) = 0$ となるものをもって。代数的数に対して、最小多項式は唯一つ存在することに注意する。このとき、 $H(\xi) := H(Q)$ を ξ の高さおよび。ここで、代数的数の高さの簡単な例を紹介する。

例. p, q を互いに素な正の整数とする。このとき、有理数 p/q の最小多項式は $qX - p$ であり、その高さは $H(p/q) = \max\{p, q\}$ となる。また、 $\sqrt{2}$ の最小多項式は $X^2 - 2$ であり、その高さは $H(\sqrt{2}) = 2$ となる。

無理数度は、有理数の分母というものさしで最良近似を定義していた。今度は、先ほど定義した高さをものさしにして最良近似を次のように2つ定義する。正の整数 n および実数 ξ に対して、

$$0 < |P(\xi)| \leq \frac{1}{H(P)^w}, \quad \deg P \leq n$$

となる $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ が無数に存在するような実数 w の上限を $w_n(\xi)$ とおく。また、

$$0 < |\xi - \alpha| \leq \frac{1}{H(\alpha)^{w^*+1}}, \quad \deg \alpha \leq n$$

となる $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ が無数に存在するような実数 w^* の上限を $w_n^*(\xi)$ とおく。これら二つの関数 w_n, w_n^* は Diophantine exponent とよばれている。任意の実数 ξ に対して、 $w_1(\xi) = w_1^*(\xi) = \mu(\xi) + 1$ であることが知られている。従って、Diophantine exponent w_n, w_n^* は無理数度 μ の概念を一般化したものである。このとき、次の2つの問題について考えることは自然なことだろう。

問題 4.1. ξ を実数、 n を正の整数とする。

- (1) ξ が代数的数のとき、 $w_n(\xi)$ と $w_n^*(\xi)$ の値を決定せよ。
- (2) Diophantine exponent w_n と w_n^* は異なる関数か。もしそうならば、どのくらい異なるかを調べよ。

問題(1)について、 $w_n(\xi), w_n^*(\xi)$ の値は、 ξ の次数と n を用いて表せることが知られている。

定理 4.2. 正の整数 n と d 次の代数的数 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して、

$$w_n(\xi) = w_n^*(\xi) = \min\{n, d - 1\}.$$

証明には、Roth の定理 (定理 2.3) の高次元版である部分空間定理が用いられる。部分空間定理の主張及び証明に関しては [13, Section VI] に書かれている。定理 4.2 のその他の部分の証明に関しては [2, Section 3.2, 3.4] に書いてある。従って、問題(1)は解決されている。

次は問題(2)について知られている結果を述べていきたい。関数 w_n と w_n^* の差の上界と下界については次が知られている。

定理 4.3 (Wirsing [19]). n を正の整数とし, ξ を実数とする. このとき,

$$0 \leq w_n(\xi) - w_n^*(\xi) \leq n - 1.$$

差の上限と下限については上記の定理からわかるが, 実際にどのくらい異なるかを調べるには, $\delta \in [0, n - 1]$ に対して $w_n(\xi) - w_n^*(\xi) = \delta$ となる $\xi \in \mathbb{R}$ の存在性を調べる必要がある. $n = 2$ のときは, 連分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}, \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ for } i \geq 1)$$

という通常の 10 進展開とは異なった実数の表記法及びその理論を用いることで, 関数 $w_2 - w_2^*$ の値域は決定されている.

定理 4.4 (Bugeaud [4]). 関数 $w_2 - w_2^*$ の値域は閉区間 $[0, 1]$ である.

$n \geq 3$ に対しては, 関数 $w_n - w_n^*$ の値域は完全に決定されていないが次の部分的な結果が知られている.

定理 4.5 (Bugeaud [1]). 関数 $w_3 - w_3^*$ の値域は区間 $[0, 2)$ を含む.

定理 4.6 (Bugeaud, Dujella [3]). n を 4 以上の整数とする. このとき, 関数 $w_n - w_n^*$ の値域は次の区間を含む:

$$\left[0, \frac{n}{2} + \frac{n-2}{4(n-1)}\right)$$

5 主結果

この節では, 有限体係数のローラン級数体でのディオファントス近似について実数と比較しながら近似の概念や先行研究について述べる. その後, 主結果を紹介する. まずは議論を展開するのに必要な記号を導入する. p を素数とし, 正の整数 s に対して $q = p^s$ とおく. 元の個数が q 個の体を \mathbb{F}_q で表し, \mathbb{F}_q 係数の多項式環を $\mathbb{F}_q[T]$ で表す. そして, $\mathbb{F}_q[T]$ の商体を $\mathbb{F}_q(T)$ で表す. つまり,

$$\mathbb{F}_q(T) = \left\{ \frac{P(T)}{Q(T)} \mid P(T), Q(T) \in \mathbb{F}_q[T], Q(T) \neq 0 \right\}$$

とする. また, \mathbb{F}_q 係数のローラン級数体を

$$\mathbb{F}_q((T^{-1})) = \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} a_n T^{-n} \mid a_n \in \mathbb{F}_q, N \in \mathbb{Z}, a_N \neq 0 \right\} \cup \{0\}$$

で表す. ここで, $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_q[T] \subset \mathbb{F}_q(T) \subset \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ という包含関係が成り立つ.

数論ではしばしば次の類似の対応を使った研究が行われている:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\longleftrightarrow \mathbb{F}_q[T] \\ \mathbb{Q} &\longleftrightarrow \mathbb{F}_q(T) \\ \mathbb{R} &\longleftrightarrow \mathbb{F}_q((T^{-1}))\end{aligned}$$

今回の主結果もそういった \mathbb{R} で成り立つことが $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ でも成り立つかどうかを調べた研究となっている.

次に, 4 節で定義した 2 つの Diophantine exponent の類似を定義したい. そのために, まずは $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 上に絶対値を定め多項式や代数的数の高さを定義する. $\xi = \sum_{n=N}^{\infty} a_n T^{-n} \in \mathbb{F}_q((T^{-1})) \setminus \{0\}$ に対して, $|\xi| := q^{-N}$, また 0 に対して, $|0| := 0$ で $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 上に絶対値を定める. この絶対値は, $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_q((T^{-1}))}$ まで一意的に延長できることが知られており, それをまた $|\cdot|$ で表す. 多項式 $P(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in (\mathbb{F}_q[T])[X]$ に対して, $H(P) := \max_{0 \leq n \leq d} |a_n|$ を P の高さおよび. 代数的数 $\xi \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ に対して, ξ の最小多項式を $Q(X)$ とおく. つまり, X に関して既約かつ原始的な多項式 $Q(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in (\mathbb{F}_q[T])[X] \setminus \{0\}$ で, $Q(\xi) = 0$ かつ a_d が T に関してモニック多項式となるものをとってくる. 代数的数に対して, 最小多項式は唯一つ存在することに注意する. このとき, $H(\xi) := H(Q)$ を ξ の高さ, $\deg \xi := \deg_X Q$ を ξ の次数とよぶ.

正の整数 n と $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ に対して,

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}, \quad \deg_X P \leq n$$

となる $P(X) \in (\mathbb{F}_q[T])[X]$ が無数に存在するような実数 w の上限を $w_n(\xi)$ とおく. また,

$$0 < |\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-w^*-1}, \quad \deg \alpha \leq n$$

となる代数的数 $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$ が無数に存在するような実数 w^* の上限を $w_n^*(\xi)$ とおく. このとき, 任意の $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ に対して $w_1(\xi) = w_1^*(\xi)$ となることが知られている. そこで, 実数と同じように次の問題について考えたい:

問題 5.1. n を正の整数とし, $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ とする.

- (1) ξ が代数的数のとき, $w_n(\xi)$ と $w_n^*(\xi)$ の値を決定せよ.
- (2) Diophantine exponent w_n と w_n^* は異なる関数か. もしそうならば, どのくらい異なるかを調べよ.

問題 (1) に関して, Liouville の定理 (定理 2.2) の類似が成り立つ.

定理 5.2 (Mahler [10]). 次数 d の代数的数 $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ に対して, $w_1(\xi) \leq d - 1$.

しかし, Roth の定理 (定理 2.3) の類似は成立しないことが知られている. つまり, $w_1(\xi) > 1$ となる代数的数 $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ が存在する. 例えば, t を正の整数, $r = p^t$ とし, $\xi := \sum_{n=0}^{\infty} T^{-r^n} \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ とおく. このとき, ξ は r 次の代数的数で $w_1(\xi) = r - 1$ となることが知られている ([10]).

このことから, 実数に比べ問題 (1) を解決するのは難しいことがわかる. 問題 (1) の部分的な結果として, w_1 の代数的数での値域については次のことが知られている.

定理 5.3 (Thakur [17], Schmidt [14]). 有理数 $w > 1$ に対して, $w_1(\xi) = w$ を満たす代数的数 $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ が無数に存在する.

今回, この結果を拡張することができたので報告する.

定理 5.4. n を正整数とし, $w > 2n - 1$ を有理数とする. このとき, 次の等式を満たす代数的数 $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ が無数に存在する:

$$w_1(\xi) = w_1^*(\xi) = \cdots = w_n(\xi) = w_n^*(\xi) = w.$$

次に問題 (2) を考える. 関数 w_n と w_n^* の差の上界と下界について次を示すことができた.

定理 5.5 ([11]). n を正整数とし, $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ とする. k を $p^k \leq n < p^{k+1}$ を満たす非負整数とする. このとき, 次が成り立つ:

$$0 \leq w_n(\xi) - w_n^*(\xi) \leq (p^k - 1)w_n^*(\xi) + (n + 1)p^k - 2.$$

さらに $1 \leq n < 2p$ ならば, 次の不等式が成り立つ:

$$0 \leq w_n(\xi) - w_n^*(\xi) \leq n - 1.$$

\mathbb{R} と $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ では標数が 0 と p で異なっており, その影響で一般の n について定理 4.3 の類似を示すことができなかった. しかし, 小さい n に対しては, 標数 p 特有の議論を用いて定理 4.3 の類似を示すことができた.

関数 $w_n - w_n^*$ の値域について次を示すことができた.

定理 5.6. n を 2 以上の整数とする. 関数 $w_n - w_n^*$ の値域は閉区間 $[0, 1]$ を含む.

定理 5.5, 5.6 から, $n = 2$ のとき関数 $w_2 - w_2^*$ の値域が閉区間 $[0, 1]$ と決定できたので, 定理 4.4 の類似が成立する. また, 任意の整数 $n \geq 2$ に対して, $w_n(\xi) \neq w_n^*(\xi)$ なる $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ の存在性がわかるため, w_n と w_n^* は異なる関数となり, 問題 (2) の前半部分は解決できた.

参考文献

- [1] Y. Bugeaud, *Mahler's classification of numbers compared with Koksma's. III*, Publ. Math. Debrecen 65 (2004), no. 3-4, 305-316.
- [2] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, 160 Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] Y. Bugeaud, A. Dujella, *Root separation for irreducible integer polynomials*, Bull. Lond. Math. Soc. 43 (2011), no. 6, 1239-1244.
- [4] Y. Bugeaud, *Continued fractions with low complexity: transcendence measures and quadratic approximation*, Compos. Math. 148 (2012), no. 3, 718-750.
- [5] L. V. Danilov, *Some classes of transcendental numbers*, (Russian) Mat. Zametki 12 (1972), 149-154. English translation Math. Notes 12 (1972), 524-527.
- [6] F. J. Dyson, *The approximation to algebraic numbers by rationals*, Acta Math. 79, (1947), 225-240.

- [7] J. Liouville, *Remarques relatives 1° à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n' est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques; 2° à un passage du livre des Principes où Newton calcule l' action exercée par une sphère sur un point extérieur*, (French), C. R. Acad. Sci. Paris 18 (1844), 883-885.
- [8] J. Liouville, *Nouvelle démonstration d' un théorème sur les irrationnelles algébriques*, (French), C. R. Acad. Sci. Paris 18 (1844), 910-911.
- [9] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, (German), Math. Ann. 101 (1929), 342-366.
- [10] K. Mahler, *On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic*, Canadian J. Math. 1, (1949), 397-400.
- [11] T. Ooto, *Quadratic approximation in $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$* , Preprint arXiv:1512.04041.
- [12] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 1-20.
- [13] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Note in Math. 785, Springer, 1980.
- [14] W. M. Schmidt, *On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields*, Acta Arith. 95 (2000), no. 2, 139-166.
- [15] 塩川 宇賢, 無理数と超越数, 森北出版 (1999).
- [16] C. L. Siegel, *Approximation algebraischer Zahlen*, Math. Z. 10 (1921), 173-213.
- [17] D. S. Thakur, *Diophantine approximation exponents and continued fractions for algebraic power series*, J. Number Theory 79 (1999), no. 2, 284-291.
- [18] A. Thue, *Über Annäherungswerte Algebraischer Zahlen*, (German), J. Reine Angew. Math. 135 (1909), 284-305.
- [19] E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, (German) J. Reine Angew. Math. 206 (1960), 67-77.