リーマンゼータ関数の導関数のa点

小野塚　友一 (Tomokazu ONOZUKA)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1 Introduction

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ は次の式で定義される関数で、数論における重要な関数の 1 つである。

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\Re s > 1)$$

この関数が重要である理由としては、$\zeta(s)$ と素数分布の関係が挙げられる。素数分布の問題は整数論の中でも主要な研究対象としてこれまでずっと取り上げられてきた。この問題にアタックするための道具としてリーマンゼータ関数が使われる。そしてその中でもリーマンゼータ関数の零点は重要な役割を果たす。リーマンゼータ関数の零点については様々な予想があるが、中でも一番大きな予想としてリーマン予想が挙げられる。リーマン予想とは「リーマンゼータ関数の非自明な零点は全て臨界線 $\Re s = 1/2$ の上にある」という主張であり、1859 年にリーマンにより予想されたが未だに解決に至っていない問題である。そのため現在でも非自明な零点は研究され続けており、これまでに様々な結果が多くの数学者によって得られている。その中でも有名な結果として 1905 年に von Mangoldt によって示された次の Riemann-von Mangoldt の公式がある。

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

ここで $N(T)$ とはリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明な零点で $0 < \Im s < T$ を満たすものの個数である。この公式は 1913 年に Landau[3] により零点から a 点に一般化された。ここで関数 $f(s)$ の a 点とは $f(s) = a$ の解で定義される点のことである。特に $\rho_a = \beta_a + i\gamma_a$ で $\zeta(s)$ の a 点を表すこととする。この記号を使うと Landau の結果は次のように書かれる；

任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して次式が成り立つ。

$$N(a;1,T) := \sum_{1<\gamma_a<T} 1 = \begin{cases} \dfrac{T}{2\pi}\log\dfrac{T}{2\pi} - \dfrac{T}{2\pi} + O(\log T) & (a \neq 1) \\[2ex] \dfrac{T}{2\pi}\log\dfrac{T}{4\pi} - \dfrac{T}{2\pi} + O(\log T) & (a = 1) \end{cases} \tag{1.1}$$

更に Landau[4] は別の一般化も行った。その一般化とは $x > 1$ に対して次の式が成り立つというものである。

$$\sum_{0<\gamma_0<T} x^{\rho_0} = -\Lambda(x)\frac{T}{2\pi} + O(\log T) \tag{1.2}$$

ただし $\Lambda(x)$ は x が整数のとき von Mangoldt の Λ 関数で、そうでなければ 0 となる関数とする。この式で $x=1$ とすると左辺は $N(T)$ と一致するため、ある種の一般化とみなせる。（ただし Landau の結果は $x>1$ のときにしか成り立たない。）この結果は更に Steuding[7] により a 点に一般化されている。Steuding が示したのは次の主張である；

正数 $x\neq 1$ に対して次式が成り立つ。

$$\sum_{0<\gamma_a<T} x^{\rho_a} = \left(\alpha(x) - x\Lambda\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{T}{2\pi} + O(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{1.3}$$

ただし $\alpha(x)$ は次の Dirichlet 級数の係数である。

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)-a} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha(n)}{n^s}$$

リーマンゼータ関数の零点に関する別の有名な結果としては 1914 年の Bohr と Landau[2] の結果がある。彼らはリーマンゼータ関数の非自明な零点はほとんど全て臨界線付近にあることを示した。Landau[3] はこの結果を a 点にまで拡張し、リーマン予想を仮定すればリーマンゼータ関数の a 点はほとんど全て臨界線付近にあることを示した。この結果は後に Levinson[5] によりリーマン予想の仮定なしでも成り立つことが示された。彼が最終的に得た結果は次である；

十分大きい T と $T^{1/2}\leq U\leq T$ と $a\in\mathbb{C}$ に対して次式が成り立つ。

$$N^{(1)}(a;T,T+U) := \sum_{\substack{T<\gamma_a<T+U \\ \beta_a>1/2+(\log\log T)^2/\log T}} 1 = O\left(\frac{U\log T}{\log\log T}\right) \tag{1.4}$$

$$N^{(2)}(a;T,T+U) := \sum_{\substack{T<\gamma_a<T+U \\ \beta_a<1/2-(\log\log T)^2/\log T}} 1 = O\left(\frac{U\log T}{\log\log T}\right) \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} N^{(3)}(a;T,T+U) &:= \sum_{\substack{T<\gamma_a<T+U \\ 1/2-(\log\log T)^2/\log T<\beta_a<1/2+(\log\log T)^2/\log T}} 1 \\ &= \frac{U}{2\pi}\log T + O\left(\frac{U\log T}{\log\log T}\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

ここまでで紹介してきた結果のいくつかはリーマンゼータ関数の導関数にまで一般化されている。これから $\zeta^{(k)}(s)$ によりリーマンゼータ関数の k 回微分を表すこととし $\rho_a^{(k)}=\beta_a^{(k)}+i\gamma_a^{(k)}$ により $\zeta^{(k)}(s)$ の a 点を表すこととする。1970 年に Berndt[1] は Riemann-von Mangoldt の公式を $\zeta^{(k)}(s)$ に拡張し次式を得た（$k\geq 1$）；

$$N_k(0;0,T) := \sum_{0<\gamma_0^{(k)}<T} 1 = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \tag{1.7}$$

また式 (1.4)-(1.6) も Levinson と Montgomery[6, Theorem 2] により $\zeta^{(k)}(s)$ に一般化されている；

$$N_k^{(1)}(0;0,T) + N_k^{(2)}(0;0,T) := \sum_{\substack{0<\gamma_0^{(k)}<T \\ |\beta_a^{(k)}-1/2|\geq\delta}} 1 \ll \delta^{-1}T\log\log T$$

2　主結果

今回紹介する主結果はここまでで紹介してきた結果を $\zeta^{(k)}(s)$ の a 点に一般化して得られたものである。最初の主結果は Landau の結果 (1.1) と Berndt の結果 (1.7) の一般化に当たるものである。

Theorem 2.1. 正の整数 k と複素数 $a \neq 0$ に対して次式が成り立つ。

$$N_k(a;1,T) := \sum_{1<\gamma_a^{(k)}<T} 1 = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

2 番目の主結果は Landau の結果 (1.2) と Steuding の結果 (1.3) の一般化となっている（ただし Steuding の結果については $x>1$ の場合のみ一般化している）

Theorem 2.2. $x>1$ とする。正の整数 k と複素数 a に対して次式が成り立つ。

$$\sum_{1<\gamma_a^{(k)}<T} x^{\rho_a^{(k)}}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{T}{2\pi} \displaystyle\sum_{\substack{l\geq 0 \\ n_0,\ldots,n_l\geq 2 \\ x=n_0\cdots n_l}} \dfrac{(-1)^{k(l+1)}}{a^{l+1}} (\log n_0)^{k+1}(\log n_1\cdots\log n_l)^k + O(\log T) & (a\neq 0), \\ \dfrac{T}{2\pi} \displaystyle\sum_{\substack{l\geq 0 \\ n_0\geq 2 \\ n_1,\ldots,n_l\geq 3 \\ x=n_0\cdots n_l/2^{l+1}}} \left(\dfrac{-1}{(\log 2)^k}\right)^{l+1} (\log n_0)^{k+1}(\log n_1\cdots\log n_l)^k + O(\log T) & (a=0) \end{cases}$$

最後の主結果は Levinson の結果 (1.4)-(1.6) の一般化である。

Theorem 2.3. k を正の整数、$\alpha > 1/2$ を実数、a を複素数とする。十分大きい T と $T^\alpha \leq U \leq T$ に対して次式が成り立つ。

$$N_k^{(1)}(a;T,T+U) := \sum_{\substack{T<\gamma_a^{(k)}<T+U \\ \beta_a^{(k)}>1/2+(\log\log T)^2/\log T}} 1 = O\left(\frac{U\log T}{\log\log T}\right)$$

$$N_k^{(2)}(a;T,T+U) := \sum_{\substack{T<\gamma_a^{(k)}<T+U \\ \beta_a^{(k)}<1/2-(\log\log T)^2/\log T}} 1 = O\left(\frac{U\log T}{\log\log T}\right)$$

$$N_k^{(3)}(a;T,T+U) := \sum_{\substack{T<\gamma_a^{(k)}<T+U \\ 1/2-(\log\log T)^2/\log T\leq\beta_a^{(k)}\leq 1/2+(\log\log T)^2/\log T}} 1$$
$$= \frac{U}{2\pi}\log T + O\left(\frac{U\log T}{\log\log T}\right)$$

参考文献

[1] B. C. Berndt, *The number of zeros for* $\zeta^{(k)}(s)$, J. Lond. Math. Soc. (2) **2** (1970), 577–580.

[2] H. Bohr and E. Landau, *Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung auf die* ζ*-Funktion und die* L*-Funktion*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **37** (1914), 269–272.

[3] H. Bohr, E. Landau, J. E. Littlewood, *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *dans le voisinage de la droite* $\sigma = \frac{1}{2}$, Bull. de l'Acad. royale de Belgique (1913), 3–35.

[4] E. Landau, *Über die Nullstellen der Zetafunktion*, Math. Ann. **71**, 1912, 548–564.

[5] N. Levinson, *Almost all roots of* $\zeta(s) = a$ *are arbitrarily close to* $\sigma = 1/2$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72** No. 4, 1975, 1322–1324.

[6] N. Levinson and H. L. Montgomery, *Zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **133**, 1974, 49–65.

[7] J. Steuding, *One hundred years uniform distribution modulo one and recent apprications to Riemann's zeta function*, Topics in Math. Analysis and Applications **94**, 2014, pp. 659–698.