向き付け不可能曲面の写像類群の表示について

大森　源城 (Genki Omori)　(東京工業大学)*

1. 導入

$N_{g,n}$ を種数 g，境界成分 n の連結な向き付け不可能コンパクト曲面，$\Sigma_{g,n}$ を種数 g，境界成分 n の連結な向き付け可能コンパクト曲面とする．S を $N_{g,n}$ もしくは $\Sigma_{g,n}$ とした時に，$\mathcal{M}(S)$ を S の写像類群，すなわち S の境界上恒等的な自己微分同相写像の境界を固定するアイソトピー類からなる群とする．ただし，S が向き付け可能な場合は向きを保つ写像類のみを考えることにする．$\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の有限表示は，Hatcher-Thurston [3]，Wajnryb [7]，Harer [2] などによって求められている．Gervais [1] はそれらの有限表示を用いて $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の無限表示を求めており，更に，Luo [4] がその Gervais の表示を書き換えてより単純化された無限表示を与えている．

一方，Paris-Szepietowski [5] によって n が 0 か 1 の時に $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の有限表示が求められており，更に Stukow [6] はその表示を書き換え，生成系が Dehn twist と Y-同相写像からなる有限表示を与えている．本稿では n が 0 か 1 の時の $\mathcal{M}(N_{g,n})$ の単純な無限表示について紹介する．

2. 準備

S 上の双側な単純閉曲線 c に対し，$t_c \in \mathcal{M}(S)$ を，c に沿って S を切り開き，その片方の境界を 360 度右に捻り再び貼り合せる事で得られる S 上の微分同相写像とし，c に沿った右手 Dehn twist と呼ぶ．ただし，S が向き付け不可能な場合には各 c の正則近傍 $\mathcal{N}(c)$ に向きを 1 つ入れる事で右手 Dehn twist t_c を定義する（図 1 参照）．

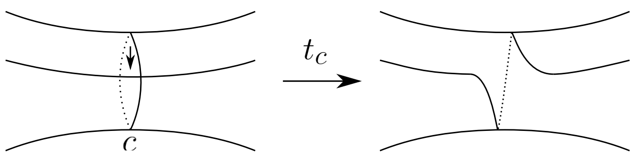

図 1: S 上の双側な単純閉曲線 c に沿った右手 Dehn twist t_c.

$N_{g,n}$ 上の単側な単純閉曲線 μ と単純閉曲線 α に対して，$Y_{\mu,\alpha} \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ を，μ の正則近傍である Möbius の帯を α に沿って 1 周させる事で得られる $N_{g,n}$ 上の微分同相写像とし，Crosscap pushing map と呼ぶ．特に α が双側な時，$Y_{\mu,\alpha}$ を Y-同相写像と呼ぶ．また，$Y_{\mu,\alpha}$ は，“μ の正則近傍である Möbius の帯を 1 点とみなし”，その操作によって α から得られる $N_{g-1,n}$ 上の基点付き単純ループ $\overline{\alpha}$ と準同型写像 $\psi_\mu : \pi_1(N_{g-1,n}) \to \mathcal{M}(N_{g,n})$ によって，$Y_{\mu,\alpha} = \psi_\mu(\overline{\alpha})$ と書ける事に注意する．

以下，Dehn twists と $Y_{\mu,\alpha}$ たちとの間の関係式について紹介する．

(0) S 上で円板若しくは Möbius の帯を張る単純閉曲線 c に対し，$t_c = 1$.

(I) ブレイド関係式：

本研究は科研費 (課題番号:15J10066) の助成を受けたものである。
*e-mail: omori.g.aa@m.titech.ac.jp

- $f \in \mathcal{M}(S)$ に対し，$ft_cf^{-1} = t_{f(c)}^{\varepsilon_f}$．ただし，$f|_{\mathcal{N}(c)} : \mathcal{N}(c) \to \mathcal{N}(f(c))$ が向きを保つ時は $\varepsilon_f = 1$，保たない時は $\varepsilon_f = -1$ とする．
- $f \in \mathcal{M}(N_{g,n})$ に対し，$fY_{\mu,\alpha}f^{-1} = Y_{f(\mu),f(\alpha)}^{\varepsilon_{\alpha,f(\alpha)}}$．ただし，$f(\alpha)$ の向きと α の向きから誘導される $f(\alpha)$ の向きが等しい時は $\varepsilon_{\alpha,f(\alpha)} = 1$，等しくない時は $\varepsilon_{\alpha,f(\alpha)} = -1$ とする．

(Ⅱ) 2-チェイン関係式：
図 2 のような単純閉曲線 c_1，c_2，δ に対し，$(t_{c_1}t_{c_2})^6 = t_\delta$．ただし，この t_{c_1}，t_{c_2}，t_δ の正の向きは $\mathcal{N}(c_1 \cup c_2)$ の向きから誘導されるものとする．

(Ⅲ) ランタン関係式：
図 3 のような単純閉曲線 α_i $(i = 1, 2, 3)$，δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ に対し，$t_{\alpha_1}t_{\alpha_2}t_{\alpha_3} = t_{\delta_1}t_{\delta_2}t_{\delta_3}t_{\delta_4}$．ただし，この t_{α_1}，t_{α_2}，t_{α_3}，t_{δ_1}，t_{δ_2}，t_{δ_3}，t_{δ_4} の正の向きは $\mathcal{N}(\alpha_1 \cup \alpha_2)$ の向きから誘導されるものとする．

(Ⅳ) $\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta} \in \pi_1(N_{g-1,n})$ が単純なループで代表される時，$\psi_\mu(\overline{\alpha\beta}) = \psi_\mu(\overline{\alpha})\psi_\mu(\overline{\beta})$．

(Ⅴ) α が単側な単純閉曲線である時，$Y_{\mu,\alpha} = t_{\delta_1}^{\varepsilon_1}t_{\delta_2}^{\varepsilon_2}$．ただし，$\delta_1 \sqcup \delta_2$ は $\mathcal{N}(\mu \cup \alpha)$ の境界になるもので，ε_1 と ε_2 はそれぞれ 1 か -1 である（図 4参照）．

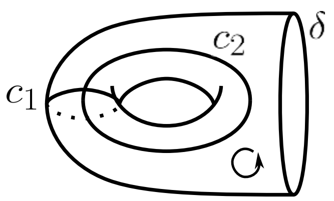

図 2: 2-チェイン関係式.

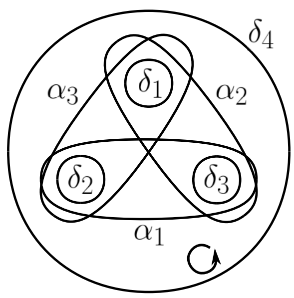

図 3: ランタン関係式.

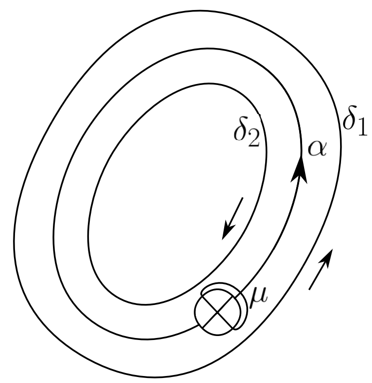

図 4: α，$\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\delta_1)$，$\mathcal{N}_{N_{g,n}}(\delta_2)$ の向きが上図のような時，$Y_{\mu,\alpha} = t_{\delta_1}t_{\delta_2}^{-1}$ となる．ここで，図中の×印は開円板を抜いて出来る境界の対蹠点の同一視を意味する．

Gervais [1] と Luo [4] が与えた $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の無限表示は，以下のものである．

定理 2.1 (Gervais, Luo). $g \geq 0$，$n \geq 0$ に対し，$\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$ の表示は以下で与えられる．
生成系：$\{t_c \mid c : \Sigma_{g,n}$ 上の単純閉曲線$\}$
関係式：(0)，(*I*)，(*II*)，(*III*)．
ただし，ブレイド関係式は $t_dt_ct_d^{-1} = t_{t_d(c)}^{\varepsilon_{t_d}}$ の形でかつ $|c \cap d|$ が 0 か 1 のもので十分．

3. 主結果

Stukow [6] の有限表示に Gervais [1] の議論を適用することによって次の結果が得られる.

定理 3.1. $g \geq 3$ かつ $n \in \{0, 1\}$，若しくは $(g, n) = (2, 1)$ に対し，$\mathcal{M}(N_{g,n})$ の表示は以下で与えられる.

生成系：$\{t_c \mid c$：$N_{g,n}$上の双側な単純閉曲線$\}$

$\cup\{Y_{\mu,\alpha} \mid \mu$：$N_{g,n}$上の単側な単純閉曲線，$\alpha$：$N_{g,n}$上の単純閉曲線$\}$

関係式：(0)，(I)，$(I\!I)$，$(I\!I\!I)$，$(I\!V)$，(V).

注意 3.2. 関係式 (I)，$(I\!V)$ を Dehn twist と Y-同相写像の積で書き直す事で，定理 3.1 の関係式 (V) は不要になる.

注意 3.3. $\mathcal{M}(N_2)$ は有限群であり，更に $\mathcal{M}(N_1)$，$\mathcal{M}(N_{1,1})$ は自明な群になる.

参考文献

[1] S. Gervais, *Presentation and central extensions of mapping class groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3097–3132.

[2] L. Harer, *The second homology group of the mapping class groups of orientable surfaces*, Invent. Math. 72, 221 239 (1983)

[3] A. Hatcher, W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Top. **19** (1980), 221–237.

[4] F. Luo, *A presentation of the mapping class groups*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 735–739.

[5] L. Paris and B. Szepietowski. *A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface*, arXiv:1308.5856v1 [math.GT], 2013.

[6] M. Stukow. *A finite presentation for the mapping class group of a nonorientable surface with Dehn twists and one crosscap slide as generators*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 12, 2226–2239.

[7] B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. **45** (1989), 157–174.