ゼータ関数と結び目不変量

九州大学大学院数理学府数理学専攻
博士後期課程1年
岡本　健太郎 *
Kentaro Okamoto

1 Introduction

有限集合 $X := \{1, 2, \ldots, n\}$ とその上の自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{S}_n$ から、**力学系のゼータ関数** が次のように定義できる。

$$\zeta_\sigma(s) := \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#\mathrm{Fix}(\sigma^m)}{m} s^m\right\},$$

ここで、$\mathrm{Fix}(\sigma^m) := \{x \in X \mid \sigma^m x = x\}$ は不動点集合である。このゼータ関数は次のような性質を持っていることが知られている ([9])。

命題 1.1. (1) $\mathrm{Cycle}(\sigma)$ と書いて $\sigma \in \mathrm{S}_n$ の中の互いに素なサイクル全体の集合を表し、$P \in \mathrm{Cycle}(\sigma)$ に対して $l(P)$ でそのサイクルの長さを表すことにする。このとき $\zeta_\sigma(s)$ は次のようなオイラー積表示をもつ:

$$\zeta_\sigma(s) = \prod_{P \in \mathrm{Cycle}(\sigma)} \frac{1}{1 - s^{l(P)}}.$$

(2) $p_n : \mathrm{S}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ を対称群の置換表現とする。このとき $\zeta_\sigma(s)$ は次のような行列式表示をもつ:

$$\zeta_\sigma(s) = \det(I_n - p_n(\sigma)s)^{-1}.$$

(3) $\zeta_\sigma(s)$ は次のような関数等式を満たす:

$$\zeta_\sigma(s) = \mathrm{sgn}(\sigma)(-s)^{-n}\zeta_\sigma(1/s),$$

ここで、$\mathrm{sgn} : \mathrm{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ は σ の符号を表す。
(4) $\zeta_\sigma(e^{-s})$ は、リーマン予想の類似を満たす。つまり、$\zeta_\sigma(e^{-s})$ のすべての極について

$$\mathrm{Re}(s) = 0.$$

が成り立つ。

このように、力学系ゼータ関数 $\zeta_\sigma(s)$ は代数体に対して定義される **デデキント・ゼータ関数** と非常に類似した性質をもっている。しかし、デデキント・ゼータ関数は、$s = 1$ における留数にその代数体の不変量（類数や判別式、レギュレーターなど）が現れるという性質をもつが、一方でこの力学系ゼータ関数 $\zeta_\sigma(s)$ においては、これに類似した性質はない。本研究では、対称群の元によって定まる力学系ゼータ関数を、組み紐群のゼータ関数へと一般化し、類似の性質が成り立つかを検証する。そして組み紐の位相幾何学的な不変量の抽出を目指す。

*Kyushu University, e-mail:k-okamoto@math.kyushu-u.ac.jp

2　組み紐群とゼータ関数

まずは組み紐群について簡単にまとめる（詳細は [3],[8],[12] を参照）。

定義 2.1. 組み紐群を次のように定める。

$$\mathrm{B}_n := \langle \sigma_i (i = 1, 2, \ldots, n-1) \mid \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i (|i-j| \geq 2), \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} (i = 1, 2, \ldots, n-2) \rangle.$$

これを **n 次組み紐群** という。

生成元 σ_i は、Figure 1 のように i 番目と $i+1$ 番目の紐の交差であるとする ([3])。 また、紐を下につなげることを積とする。さらに、Figure 2 のように組み紐の上と下をつなぎ合わせることによってできる絡み目を組み紐の **閉包** といい、σ の閉包を $\widehat{\sigma}$ と書くことにする。

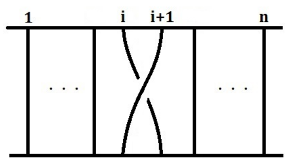

Figure 1: 生成元 σ_i

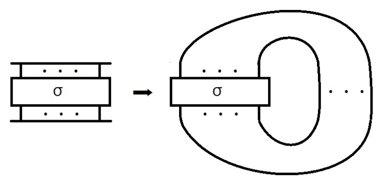

Figure 2: σ の閉包

以下、組み紐群に関する基本事項をいくつか述べる。
(1) 自然な全射 $\pi_n : \mathrm{B}_n \longrightarrow \mathrm{S}_n$ を次のように定める。

$$\pi_n(\sigma_i) := (i, i+1).$$

(2) $\sigma \in \mathrm{B}_n$ に対し、$\pi_n(\sigma) \in \mathrm{S}_n$ が長さ n のサイクルであるとき、$\widehat{\sigma}$ は結び目になる。
(3) 組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_n$ が生成元を用いて $\sigma = \sigma_{i_1}^{e_1}\sigma_{i_2}^{e_2}\cdots\sigma_{i_r}^{e_r}$ と表されるとき、準同型写像 $\varepsilon : \mathrm{B}_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ を次で定める。

$$\varepsilon(\sigma) := e_1 + e_2 + \cdots + e_r.$$

このとき、$\varepsilon(\sigma)$ を、組み紐 σ の **指数和** という。
次に本研究で扱うゼータ関数について簡単に説明する。

定義 2.2. 群の表現 (G, ρ, V) が与えられているとき、元 $g \in G$ に対し、次の関数を考える。

$$\zeta(s, g; \rho) := \det(I - \rho(g)s)^{-1}.$$

これを $g \in G$ の、**表現ρに付随するゼータ関数** と呼ぶ。

これにより、第 1 章で定義した力学系ゼータ関数 $\zeta_\sigma(s)$ は対称群 S_n の置換表現 p_n に付随するゼータ関数であると考えることができる。つまり、$\sigma \in \mathrm{S}_n$ に対し

$$\zeta_\sigma(s) = \zeta(s, \sigma; p_n)$$

と表すことができる。この点に着目して、組み紐群の表現からゼータ関数を構成する。
まずは組み紐群の古典的かつ自然な表現である Burau 表現を紹介する。

定義 2.3. 組み紐群 B_n の生成元 σ_i に関して写像 $\beta_{n,q}$ を次のように定義する。

$$\beta_{n,q}(\sigma_i) := I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1} \in \mathrm{GL}_n(\Lambda). \tag{2.1}$$

ここで $\Lambda := \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$（$\mathbb{Z}$ 係数の一変数 Laurent 多項式環）とする。$\beta_{n,q}$ を、組み紐群の **Burau 表現** と呼ぶ。

この Burau 表現を用いて、組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_n$ に関するゼータ関数を次のように定義する。

$$\zeta(s,\sigma;\beta_{n,q}) = \det(I_n - \beta_{n,q}(\sigma)s)^{-1}. \tag{2.2}$$

これが、本研究の中心となる、組み紐のゼータ関数（正確には組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_n$ の Burau 表現に付随するゼータ関数）である。また、Burau 表現において、q に 1 を代入すると置換表現になることから、組み紐群の Burau 表現と対称群の置換表現との間には次のような関係が成り立っている。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}_n & \xrightarrow{\beta_{n,q}} & \mathrm{GL}_n(\Lambda) \\ {\scriptstyle \pi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q\to 1} \\ \mathrm{S}_n & \xrightarrow{p_n} & \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \end{array} \tag{2.3}$$

この可換図式から、極限公式

$$\lim_{q\to 1}\zeta(s,\sigma,\beta_{n,q}) = \zeta(s,\pi_n(\sigma),p_n) = \zeta_{\pi_n(\sigma)}(s). \tag{2.4}$$

が成り立ち、組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_n$ のゼータ関数は、力学系ゼータ関数の q-変形であると思える。

3　組み紐のゼータ関数の諸性質

組み紐のゼータ関数は次の性質をもつ。

定理 3.1. (1) 組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_n$ に対して、次のような関数等式が成り立つ。

$$\zeta(s,\sigma;\beta_{n,q}) = \mathrm{sgn}_q(\sigma)^{-1}(-s)^{-n}\zeta(1/s,\sigma^{-1};\beta_{n,q}).$$

ここで、$\mathrm{sgn}_q(\sigma) := \det(\beta_{n,q}(\sigma))$ とする。
(2) 組み紐の閉包 $\hat{\sigma}$ が結び目である（つまり $\pi_n(\sigma) \in \mathrm{S}_n$ が長さ n のサイクルである）とき、$\zeta(s,\sigma;\beta_{n,q})$ の $s=1$ における留数は次で与えられる。

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{s=1}\zeta(s,\sigma;\beta_{n,q}) = -\frac{1}{[n]_q}\Delta_{\hat{\sigma}}(q)^{-1}.$$

ここで $\Delta_{\hat{\sigma}}(q)$ は結び目 $\hat{\sigma}$ に関する Alexander 多項式であり、$[n]_q$ は q-整数で、次のように定める。

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}.$$

(3) q は複素平面上の単位円周上の点（このとき q は $e^{i\theta}(\theta \in \mathbb{R})$ と表される）であり、q の偏角が不等式 $|\theta| < 2\pi/n$ を満たしていると仮定する。このとき任意の組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_n$ に関するゼータ関数はリーマン予想の類似を満たす。つまり、 $\zeta(e^{-s},\sigma;\beta_{n,q})$ のすべての極に関して次が成り立つ。

$$\mathrm{Re}(s) = 0.$$

極限公式 (2.4) と定理 3.1 からわかるように、(2.2) で定義された組み紐のゼータ関数は力学系ゼータ関数 $\zeta_\sigma(s)$ の q-変形であり、多くの類似した性質をもつ。さらに、力学系ゼータ関数にはなかった性質として、組み紐のゼータ関数は $s=1$ における留数に（結び目の）不変量が現れた。これは第 1 章で述べたように、代数体に対して定義されるデデキントゼータ関数の $s=1$ における留数に、代数体の不変量が現れる性質に対応するものと考えられる。

以下、力学系ゼータ関数と Burau 表現に付随する組み紐のゼータ関数の比較表を与える。

ゼータ関数	力学系ゼータ関数	組み紐のゼータ関数
元	$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathrm{X}) \simeq \mathrm{S}_n$	$\sigma \in \mathrm{B}_n$
母関数表示	$\zeta_\sigma(s) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#\mathrm{Fix}(\sigma^m)}{m} s^m\right\}$	$\zeta(s,\sigma;\beta_{n,q}) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{tr}\beta_{n,q}(\sigma^m)}{m} s^m\right\}$
行列式表示	$\zeta_\sigma(s) = \det(I_n - p_n(\sigma)s)^{-1}$	$\zeta(s,\sigma;\beta_{n,q}) = \det(I_n - \beta_{n,q}(\sigma)s)^{-1}$
関数等式	$\zeta_\sigma(s) = \mathrm{sgn}(\sigma)(-s)^{-n}\zeta_\sigma(1/s)$	$\zeta(s,\sigma;\beta_{n,q}) = \mathrm{sgn}_q(\sigma)^{-1}(-s)^{-n}\zeta(1/s,\sigma^{-1};\beta_{n,q})$
$s=1$ における留数	$\mathrm{Res}_{s=1}\, \zeta_\sigma(s) = -\frac{1}{n}$	$\mathrm{Res}_{s=1}\, \zeta(s,\sigma;\beta_{n,q}) = -\frac{1}{[n]_q}\Delta_{\hat{\sigma}}(q)^{-1}$
リーマン予想の類似	成立する	$q = e^{i\theta}(\lvert\theta\rvert < \frac{2\pi}{n})$ の場合に成立する。

4 Jones 多項式とゼータ関数

第 3 章では、ゼータ関数と Alexander 多項式のつながりを見てきた。この章では結び目の強力な多項式不変量である、Jones 多項式とゼータ関数のつながりを考えてみる。

定義 4.1. V を 2 次元 Λ-加群とする。写像 $\mathfrak{J}_{n,q} : \mathrm{B}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V^{\otimes n})$ を、生成元 $\sigma_i \in \mathrm{B}_n$ に対して、

$$\mathfrak{J}_{n,q}(\sigma_i) := I_2^{\otimes(i-1)} \otimes \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & q & \\ & 1 & 1-q & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \otimes I_2^{\otimes(n-i-1)}$$

で定める。これを **組み紐群のJones表現** という。このとき、

$$\mu := \begin{pmatrix} 1 & \\ & q \end{pmatrix}$$

として、

$$J_\sigma(q) = \frac{q^{-\frac{1}{2}(n-\varepsilon(\sigma)-1)}}{1+q}\mathrm{tr}(\mathfrak{J}_{n,q}(\sigma)\cdot\mu^{\otimes n})$$

という多項式を定める (これは多項式になる)。これは組み紐の閉包 $\hat{\sigma}$ の不変量になり、**Jones多項式** という。

次に、この Jones 表現を使ってゼータ関数を定義し、Jones 多項式や、Alexander 多項式との関係を考えていく。まずは表現のゼータ関数の定義に従い、組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_n$ の Jones 表現に付随するゼータ関数を次のように定める。

$$\zeta(s,\sigma;\mathfrak{J}_{n,q}) := \det(I_{2^n} - \mathfrak{J}_{n,q}(\sigma)s)^{-1}$$

さらに、このゼータ関数の "変形版" として、次の関数を定める。

$$\zeta_t(s,\sigma;\mathfrak{J}_{n,q}) := \det(I_{2^n} - \mathfrak{J}_{n,q}(\sigma)\cdot\mu_t^{\otimes n}s)^{-1}.$$

ここで、μ_t は

$$\mu_t := \begin{pmatrix} 1 & \\ & t \end{pmatrix}$$

とする。このとき、Jones 多項式はこのゼータ関数を用いて次のように表すことができる。

$$\left.\frac{d}{ds}\log\zeta_q(s,\sigma;\mathfrak{J}_{n,q})\right|_{s=0} = \mathrm{tr}(\mathfrak{J}_{n,q}(\sigma)\cdot\mu_q^{\otimes n}) = q^{\frac{1}{2}(n-\varepsilon(\sigma)-1)}(1+q)J_\sigma(q).$$

続いて、具体的に Jones 表現に付随するゼータ関数と Burau 表現に付随するゼータ関数の関係を紹介する。Jones や Birman らによって、本質的に次の関係式が示されている ([4])。

命題 4.1. 3 次の組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_3$ に対して、次が成り立つ。

$$\zeta_t(s,\sigma;\mathfrak{J}_{3,q}) = \frac{\zeta(ts,\sigma;\beta_{3,q})\zeta(t^2s,\sigma;\beta_{3,q})}{(1-s)(1-t^3s)}.$$

このことから、3 次の組み紐に関しては、Jones 表現に付随するゼータ関数が Burau 表現由来のゼータ関数を使って表せることがわかる。一般の組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_n$ に関するこのような関係式は複雑でありよくわかっていなかった。本研究では、“ q-外積代数 ”というものを用いることで簡明な関係式を与えることができた（[10]）。

定義 4.2. W_n を Λ-加群とし、その基底を $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ とする。W_n に関するテンソル代数を

$$T(W_n) := \bigoplus_{m=0}^{\infty} W_n^{\otimes m}$$

とする。このとき ***q*-外積代数** を

$$\bigwedge{}_q(W_n) := T(W_n)/\langle f_i \otimes f_j + q f_j \otimes f_i (1 \le i < j \le n), f_i \otimes f_i (1 \le i \le n)\rangle$$

で定める。

q-外積代数は

$$\bigwedge{}_q(W_n) = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge{}_q^k(W_n)$$

と表すことができる。ただし、

$$\bigwedge{}_q^k(W_n) := \langle f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} (1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n) \mid f_i \wedge f_j = q f_j \wedge f_i (i<j), f_i \wedge f_i = 0\rangle$$

である。さらに、q に $-q$ を代入したものを

$$\widetilde{\bigwedge}{}_q(W_n) := \bigwedge{}_{-q}(W_n)$$

と書くことにする。いま、Burau 表現を

$$\beta_{n,q} : \mathrm{B}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(W_n)$$

とするとき、次が成り立つ。

定理 4.1. Λ-加群の準同型写像 $\mathfrak{H}_n : V^{\otimes n} \longrightarrow \widetilde{\bigwedge}{}_q(W_n)$ が存在し、任意の $\sigma \in \mathrm{B}_n$ に対し、次の図式

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes n} & \xrightarrow{\mathfrak{H}_n} & \widetilde{\bigwedge}{}_q(W_n) \\ {\scriptstyle \mathfrak{J}_{n,q}(\sigma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\wedge}_q \beta_{n,q}(\sigma)} \\ V^{\otimes n} & \xrightarrow{\mathfrak{H}_n} & \widetilde{\bigwedge}{}_q(W_n) \end{array}$$

は可換になる。ここで、$\widetilde{\wedge}_q \beta_{n,q}$ は Burau 表現から自然に定まる表現である。

さらに、各 $k (0 \le k \le n)$ に関しても Burau 表現から次の表現が自然に定まる。

$$\widetilde{\wedge}_q^k \beta_{n,q} : \mathrm{B}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(\widetilde{\bigwedge}{}_q^k(W_n)).$$

このような考察から、変形版のゼータ関数に関する次の公式が得られた。

定理 4.2. 任意の組み紐 $\sigma \in \mathrm{B}_n$ に関して次が成り立つ。

$$\zeta_t(s, \sigma; \mathfrak{J}_{n,q}) = \prod_{k=0}^{n} \zeta(t^k s, \sigma; \widetilde{\wedge}_q^k \beta_{n,q}).$$

左辺からは Jones 多項式が計算でき、また右辺は Alexander 多項式に由来する Burau 表現のみで表されている。Jones 表現と Burau 表現の関係をゼータ関数を通して理解できる非常に興味深い公式である。

なお、簡単な考察から、

$$\zeta(s, \sigma; \widetilde{\wedge}_q^0 \beta_{n,q}) = \zeta(s, \sigma; \widetilde{\wedge}_q^n \beta_{n,q}) = \frac{1}{1-s},$$
$$\zeta(s, \sigma; \widetilde{\wedge}_q^1 \beta_{n,q}) = \zeta(s, \sigma; \widetilde{\wedge}_q^{n-1} \beta_{n,q}) = \zeta(s, \sigma; \beta_{n,q})$$

となることがわかる。$n = 3$ の場合、定理 4.2 は命題 4.1 の公式に一致する。

5 展望

表現のゼータ関数 $\zeta(s, \sigma; \widetilde{\wedge}_q^k \beta_{n,q})$ の有用な公式はまだ得られていない。この公式を得ることが第一の課題である。さらに、色付き Jones 多項式との関連や、Melvin-Morton 予想 ([13]) のゼータ関数を用いた別証明、トーラス結び目の Jones 多項式の初等的な証明もこのゼータ関数を使ってできるのではないかと期待している。また、極限 $q \to 1$ をとった場合のゼータ関数と力学系ゼータ関数との関連も明らかにしていきたい。

References

[1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1928) 275–306.

[2] E. Artin. Theory of braids, Ann. of Math. (2) 48 (1947) 101–126.

[3] J. S. Birman. Braids, links, and mapping class groups. Ann. Math. Studies 82. Princeton University. Press, 1974.

[4] J. S. Birman, On the Jones polynomial of closed 3-braids. Inventiones mathematicae 81 (1985) 287–294.

[5] C. Blanchet and I. Marin. Cabling Burau representation. preprint, (2006) arXiv :math/0701189.

[6] A. Deitmar and S. Koyama and N. Kurokawa. Absolute zeta functions, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 84 (2008) no. 8, 138–142.

[7] Serkan Karacuha, Christian Lomp. Integral Calculus on Quantum Exterior Algebras, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 11 (2014) 1450026 (20 pages).

[8] C. Kassel and V. Turaev. Braid Groups. Springer, 2008.

[9] S. Kim and S. Koyama and N. Kurokawa. The Riemann hypothesis and functional equations for zeta functions over $\mathbf{F}_1$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 85, (2009) no. 6, 75–80.

[10] S. Koyama and S. Nakajima. Zeta functions of generalized permutations with application to their factorization formulas, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 88, (2012) no. 8, 115–120.

[11] B. I. Kurpita and K. Murasugi. A study of braids . Mathematics and its Applications, 484. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[12] T. Ohtsuki. Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets, Series on Knots and Everything, 29. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.

[13] L. Rozansky. The universal R-matrix, Burau representation, and the Melvin-Morton expansion of the colored Jones polynomial, Adv. Math. 134 (1998) 1–31.

[14] C. C. Squier. The Burau representation is unitary. Proceedings of the Amer. Math. Soc. 90(2) (1984)199–202. MR 85b:20056.

[15] T. Yamamoto. Inversion formulas for tridiagonal matrices with applications to boundary value problems, Numerical Functional Analysis and Optimization 22, (2001) 357–385.