On the Riemann-Hilbert correspondence for unit F-crystals

大川幸男 (Sachio OHKAWA)

東大数理 博士課程 3 年

1　導入

古典的に Riemann-Hilbert 対応とは, 基本群の表現に対してその表現をモノドロミー表現に持つ線形微分方程式の存在を問う. 1980 年代に柏原と Mebkhout は, 複素多様体 X に対し, Riemann-Hilbert 対応をコホモロジー層が正則ホロノミックな $\mathcal{D}_X$-加群の複体が定める導来圏 $D^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ とコホモロジー層が構成可能な $\mathbb{C}$-線形空間に値を持つ層の複体が定める導来圏 $D^b_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})$ との三角圏同値

$$D^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\cong} D^b_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})$$

として（独立に）定式化した. ここに $\mathcal{D}_X$ は X 上の微分作用素のなす環の層であり, 前者の圏の対象は X 上の線形偏微分方程式系を起源を持つ. 一方で構成可能層とは局所系の一般化であり, 後者の圏の対象は位相幾何学的である. この圏同値はコホモロジー理論の観点から重要な意味をもつ. $D^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ には Grothendieck の 6 つの演算 f_*, f^*, $f_!$, $f^!$, $\otimes^{\mathbb{L}}$, $\underline{\mathrm{Hom}}$ が定義され, ドラームコホモロジー論を含むような相対コホモロジー論を与える. ここに f は複素多様体の射である. 一方 $D^b_{\mathrm{c}}(X,\mathbb{C})$ は特異コホモロジー論を含む相対コホモロジー論の枠組みを与える. 柏原-Mebkhout による Riemann-Hilbert 対応の著しい性質は, 両者の圏に独立に定義される Grothendieck の 6 つの演算と整合的となることである.

数論幾何においても様々なコホモロジー理論とそれらの間の比較同型が研究されてきた. Emerton-Kisin は [EK2] において柏原-Mebkhout による Riemann-Hilbert 対応の正標数における類似を構成した. 筆者の研究は Emerton-Kisin の仕事の一部を一般化したものである. 以下, 2 節において筆者の研究の出発点となった Emerton-Kisin の結果を簡単に紹介し, また筆者の研究の動機について述べる. 3 節において筆者の [O3] における結果を紹介する.

2　unit F-crystal に対する Riemann-Hilbert 対応

まず Emerton-Kisin による結果 [EK2] を復習する. 論文 [EK2] は大部であるが, 彼ら自身による解説論文 [EK1] もあることをあげておく.

k を標数 $p>0$ の完全体, W をその Witt 環とする. W_n を商環 W/p^nW とする. X を滑らかな W_n-スキーム, $\mathcal{D}_X$ を X 上の微分作用素のなす環の層とする. Emerton-Kisin は構造層

$\mathcal{O}_X$ に X 上の微分作用素と "$X \otimes_{W_n} k$ の絶対フロベニウスの X への局所的な持ち上げ F" を付け加えた環の層 $\mathcal{D}_{F,X}$ を導入した. $\mathcal{D}_{F,X}$ は一般には非可換な $\mathcal{O}_X$-代数をなし, また自然な環の係数拡大 $\mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_{F,X}$ が存在する. Berthelot による数論的 $\mathcal{D}$-加群の理論 (とくにフロベニウス降下の理論) を応用すると, フロベニウスによる引き戻し関手

$$F^* : (\textit{left } \mathcal{D}_X\textit{-modules}) \to (\textit{left } \mathcal{D}_X\textit{-modules})$$

を X 上大域的に定義することができる.

Remark 2.1. この関手の構成に絶対フロベニウス $F_{X\otimes_{W_n}k}$ の X への持ち上げの存在をかす必要はない. 局所的に取ったフロベニウス持ち上げで引き戻した $\mathcal{D}_X$-加群が張り合うというのが構成の鍵である.

この関手 F^* を用いると, 左 $\mathcal{D}_{F,X}$-加群 $\mathcal{M}$ を次のように特徴づけることが出来る. 即ち, 左 $\mathcal{D}_{F,X}$-加群 $\mathcal{M}$ 与えることは $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{D}_X$-線形な射 (構造射と呼ぶ)$\psi_{\mathcal{M}} : F^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ の組を与えることと同値である.

Definition 2.2. *左 $\mathcal{D}_{F,X}$-加群 $\mathcal{M}$ が locally finitely generated unit とは, $\mathcal{M}$ の構造射 $\psi_{\mathcal{M}}$ が同型であり, さらに局所的に $\mathcal{M}$ の連接 $\mathcal{O}_X$-部分加群 $M \subset \mathcal{M}$ で自然な射 $\mathcal{D}_{F,X} \otimes_{\mathcal{O}_X} M \to \mathcal{M}$ が全射となるものが存在することをいう. locally finitely generated unit $\mathcal{D}_{F,X}$-加群全体は, 左 $\mathcal{D}_{F,X}$-加群のなす圏の thick 部分圏をなす.*

X/W_n に対する $\mathcal{D}$-加群の圏の類似を定義する. 三角圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$ を, コホモロジー層が全て locally finitely generated unit であり, かつ $\mathcal{O}_X$-加群の複体として Tor 次元が有限となるもののなす $D^b(\mathcal{D}_{F,X})$ 充満部分圏として定義する. ここに $D^b(\mathcal{D}_{F,X})$ は左 $\mathcal{D}_{F,X}$-加群の複体が定める導来圏である.

$f : X \to Y$ を滑らかな W_n-スキームの間の射とする. Emerton-Kisin は複素数体上の $\mathcal{D}$-加群の理論に類似した方法で, 順像関手

$$f_+ : D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ \to D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,Y})^\circ$$

逆像関手

$$f^! : D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,Y})^\circ \to D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$$

およびテンソル積

$$\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} : D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ \times D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ \to D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$$

を構成した.

Emerton-Kisin の研究では $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,Y})^\circ$ と X のエタールサイト上の三角圏を比較する. $D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ を $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$ 上の $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-加群の有限複体でそのコホモロジー層が構成可能でかつ $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-加群として Tor 次元が有限となるもののなす $D^b(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ の充満部分圏とする. よく知られているように, 射 $f : X \to Y$ に対して固有な台付き順像関手

$$f_! : D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to D^b_{\mathrm{ctf}}(Y_{\mathrm{\acute{e}t}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}),$$

逆像関手

$$f^{-1}: D^b_{\mathrm{ctf}}(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

およびテンソル積

$$\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}: D^b_{\mathrm{ctf}}(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \times D^b_{\mathrm{ctf}}(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

が定義される．

X を滑らかな W_n-スキームとする．$\pi_X : X_{\text{ét}} \to X$ を自然なサイトの射とする．ここに X は Zariski サイトを表す．この時 $\mathcal{D}_{F,X_{\text{ét}}} := \pi_X^* \mathcal{D}_{F,X}$ は自然に $X_{\text{ét}}$ 上の $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$-代数をなす．エタール降下により, 三角圏の同値

$$\pi_X^* : D^b_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_{F,X}) \to D^b_{\mathrm{qc}}(\mathcal{D}_{F,X_{\text{ét}}})$$

を得る．$\mathcal{M} \in D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$ に対して

$$\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_{F,X_{\text{ét}}}}(\pi_X^*(\mathcal{M}), \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})[d_X].$$

とおく．この対応は反変関手

$$\mathrm{Sol}_X : D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ \to D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

を定める [EK2, Proposition 16.1.7]．一方逆に, $\mathcal{L} \in D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ に対して

$$\mathrm{M}_X(\mathcal{L}) = \pi_{X*}\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})[d_X].$$

とおく．この対応は反変関手

$$\mathrm{M}_X : D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X}).$$

を定める．以上の記号の準備の下で, [EK2] の主結果 [EK2, Corollary 16.2.6] は次のようにまとめることが出来る．

Theorem 2.3. *X を滑らかな W_n-スキームとする．この時関手 Sol_X は M_X を準逆に持つ三角圏の同値*

$$D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,X})^\circ \to D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

を定める．さらに Sol_X は以下の性質を満たす．(M_X についても対応した主張が成り立つが省略する.)

(1) 関手的な同型 $\mathrm{Sol}_X(- \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} -) \cong \mathrm{Sol}_X(-) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathrm{Sol}_X(-)[d_X]$ が存在する．ここに d_X は X の W_n 上の相対次元を表す．

(2)$f : X \to Y$ を滑らかな W_n-スキームの間の射とする．この時, 関手的な同型 $f^{-1} \circ \mathrm{Sol}_Y \cong \mathrm{Sol}_X \circ f^!$ が存在する．

(3) $f : X \to Y$ を滑らかな W_n-スキームの間の allowable 射とする．この時, 関手的な同型 $f_! \circ \mathrm{Sol}_X \cong \mathrm{Sol}_Y \circ f_+$ が存在する．ここにスキームの射が allowable とは, 埋め込みと固有滑らかな射の合成で書けることをいう．

筆者の研究の動機を述べる．X を k 上の代数多様体とする．Emerton-Kisin の理論は W_n 上の滑らかな持ち上げ P/W_n を持つ代数多様体 X/k にしか適用出来ず, 十分に研究がなされているとは言えない．またさらに, 三角圏の同値

$$D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,P})^\circ \to D^b_{\mathrm{ctf}}(P_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

に置ける右辺は P の標数 p への還元 X から完全に決定される．このことからも左辺の理論も代数多様体 X/k にのみよる形で定まるべきである (Grothendieck のクリスタルの思想). そこで筆者は Emerton-Kisin の理論を W_n 上埋め込み可能な k-スキームに拡張した．ここで分離的有限形な k-スキーム X が W_n 上埋め込み可能とは, 滑らかな W_n-スキーム P と埋め込み $X \hookrightarrow P$ で以下の図式を可換にするものが存在することをいう．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ \mathrm{Spec} k \arrow[r] & \mathrm{Spec} W_n. \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

明らかなように, k 上の準射影的代数多様体は W_n 上埋め込み可能である．従って, ある意味で, W_n 上埋め込み可能な代数多様体は十分に広いクラスをなす.

3　主結果

研究の最初の困難は W_n 上埋め込み可能な代数多様体 X/k に対して, その $\mathcal{D}$-加群の圏を定義することである．筆者は柏原の定理の基づく自然な方法によりこの困難を克服した．ここに柏原の定理とは, 複素多様体の閉埋め込み $X \hookrightarrow P$ に対し, X 上の $\mathcal{D}$-加群の圏と P 上の $\mathcal{D}$-加群でその台が X に含まれるもののなす圏は自然に圏同値であることを主張する.

X を W_n 上埋め込み可能な k-スキームとし, 滑らかな W_n-スキーム P と埋め込み $X \hookrightarrow P$ をとる．この時三角圏 $\mathcal{C}_{P,X}$ を "台が X に含まれる" $D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,P})^\circ$ の対象からなる充満部分圏として定義する.

Remark 3.1. 今 X は P における閉集合とは限らないことを注意する．条件 "台が X に含まれる" は正確には局所コホモロジーを用いて定式化する必要があるが, ここでは割愛する.

次の定理が $\mathcal{D}$-加群の圏を定義する鍵である.

Theorem 3.2. $f : P \to Q$ を滑らかな W_n-スキームの間の固有滑らかな射．埋め込み $i_1 : X \hookrightarrow P$ と $i_2 : X \hookrightarrow Q$ で $f \circ i_1 = i_2$ を満たすものが与えられたとする．この時, 順像関手 f_+ は三角圏の同値

$$f_+ : \mathcal{C}_{P,X} \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_{Q,X} \tag{3.1}$$

を定める.

この定理によって X を W_n 上埋め込み可能な k-スキームに対する $\mathcal{D}$-加群の圏は以下のように定義すれば良いとわかる.

Definition 3.3. X を W_n 上埋め込み可能な k-スキームとする．固有滑らかな W_n-スキーム P への埋め込み $X \hookrightarrow P$ を一つとり，三角圏 $D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ$ を $\mathcal{C}_{P,X}$ で定義する．この定義は定理 *3.2* によって埋め込み $X \hookrightarrow P$ の取り方に *up to natural isomorphism* でよらない．

X を W_n 上埋め込み可能な k-スキームとし，固有滑らかな W_n-スキーム P への埋め込み $i : X \hookrightarrow P$ を一つとる．関手 $\mathrm{Sol}_X : D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ \to D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ を合成

$$\mathcal{C}_{P,X} = D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ \subset D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,P})^\circ \xrightarrow{\mathrm{Sol}_P} D^b_{\mathrm{ctf}}(P_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^{-1}} D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

で定義する．この定義は埋め込み $i : X \hookrightarrow P$ の取り方によらないことが示せる．

一方逆に，関手の合成

$$D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} D^b_{\mathrm{ctf}}(P_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{M}_P} D^b_{\mathrm{lfgu}}(\mathcal{D}_{F,P})^\circ$$

を考えると，この本質的像は $\mathcal{C}_{P,X}$ に含まれることが示せ，我々は関手 $\mathrm{M}_X : D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ = \mathcal{C}_{P,X}$ を得る．この定義も埋め込み $i : X \hookrightarrow P$ の取り方によらないことが示せる．以上の記号の準備の下で，主結果は以下のように述べることが出来る．

Theorem 3.4. X を W_n 上埋め込み可能な k-スキームとする．この時 Sol_X は M_X を準逆にもつ三角圏の同値

$$\mathrm{Sol}_X : D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ \xrightarrow{\cong} D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \tag{3.2}$$

を定める．

$f : X \to Y$ を W_n 上埋め込み可能な k-スキームの間の射とする．我々も自然な方法で，$D^b_{\mathrm{lfgu}}(X/W_n)^\circ$ に対して順像関手 f_+，逆像関手 $f^!$，テンソル積 $\otimes^{\mathbb{L}}$ を埋め込みによらない形で定式化することが出来る．

Theorem 3.5. $f : X \to Y$ を W_n 上埋め込み可能な k-スキームの間の射とする．
(1) 関手的な同型 $\mathrm{Sol}_X(- \otimes^{\mathbb{L}} -) \cong \mathrm{Sol}_X(-) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathrm{Sol}_X(-)$ が存在する．
(2) 関手的な同型 $f^{-1} \circ \mathrm{Sol}_Y \cong \mathrm{Sol}_X \circ f^!$ が存在する．
(3) 関手的な同型 $f_+ \circ \mathrm{Sol}_Y \cong \mathrm{Sol}_X \circ f_!$ が存在する．

参考文献

[EK1] M. Emerton and M. Kisin, An introduction to the Riemann-Hilbert correspondence for unit F-crystals, *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin,* (2004), 677-700.

[EK2] M. Emerton and M. Kisin, The Riemann-Hilbert correspondence for unit F-crystals, *Astérisque* No. **293** (2004).

[O3] Sachio Ohkawa, Riemann-Hilbert correspondence for unit F-crystals on embeddable algebraic varieties.