

平面的な曲率線をもつ極小曲面の分類と その変形について*

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
緒方 勇太 (Yuta Ogata)

1 Introduction

「平均曲率一定曲面 (CMC 曲面)」はシャボン玉の数学的モデルであり、CMC 曲面の構成方法の研究は古くから行われてきた。1866 年に、K. T. Weierstrass により \mathbb{R}^3 内の平均曲率一定零曲面 (極小曲面) に対して、積分型の公式 (Proposition 2.1) が与えられた。また、 \mathbb{R}^3 内の平均曲率がゼロでない一定曲面に関しては、J. Dorfmeister と F. Pedit、H. Wu によって、行列分解などを用いた構成理論 (DPW 法 [3]) が考案された。現在、CMC 曲面の構成方法はユークリッド空間だけでなく、リーマン空間形やセミリーマン空間形などでも研究が進んでいる。

一方、「平面的な曲率線をもつ CMC 曲面」は、有名な例を多く含んでいることが知られており、H. Wente ([10]) によって発見されたコンパクト CMC 曲面の非自明な例 (Wente トーラス Fig.2) もこのクラスに含まれている。また、今回のテーマである「平面的な曲率線をもつ極小曲面」は A. Enneper や L. P. Eisenhart、J. C. C. Nitsche などの先行研究 ([4], [5], [7]) により、すでに分類定理が存在し、平面、Catenoid、Enneper 曲面、Bonnet 曲面に限ることが知られている。本講演では、Liouville 方程式に注目しながら、「平面的な曲率線をもつ極小曲面」の分類の別証明と、それらの曲面の変形について考察する。([2])

2 Preliminaries

Σ を \mathbb{R}^2 内の単連結領域とし、 $X \ni (u, v) \mapsto X(u, v) \in \mathbb{R}^3$ を共形構造をもつ極小曲面とする：

$$I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2) \quad \text{for } \omega : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}.$$

このとき、以下の「Weierstrass の表現公式」が知られている。

Proposition 2.1 (Weierstrass の表現公式 [9]). 任意の単連結な極小曲面は、以下の積分型の公式で与えられる：

$$X(u, v) = \text{Re} \left[\int (1 - h^2, i(1 + h^2), 2h)\eta dz \right] \quad (2.1)$$

ただし、 $z = u + iv$, h :有理型関数, ηdz :正則 1 次微分形式。また、その計量と法ベクトル $N(u, v)$ は、Weierstrass データ (h, η) を用いて、

$$I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2) = (1 + |h|^2)^2 |\eta|^2 (du^2 + dv^2), \quad (2.2)$$

$$N = \left(\frac{h + \bar{h}}{1 + |h|^2}, \frac{i(\bar{h} - h)}{1 + |h|^2}, \frac{|h|^2 - 1}{1 + |h|^2} \right) \quad (2.3)$$

と記述される。

*この研究は、Joseph Cho 氏 (神戸大学) との共同研究 ([2]) によるものである。

Remark 2.1. 一つの極小曲面を構成する際、*Weierstrass* データ (h, η) は一意に決まるわけではない。例えば、*Catenoid* を構成するための *Weierstrass* データとして、 (e^z, e^{-z}) が一般的だが、 $(\tanh(\frac{z}{2}), \cosh^2(\frac{z}{2}))$ などでもよい。

また、全臍点的でない (i.e. 平面でない) 極小曲面は、「双等温座標」と呼ばれる共形かつ曲率線座標に座標変換できることが知られている。

Fact 2.1. 双等温座標のとき、*Weierstrass* データ (h, η) には以下の関係が成り立つ：

$$\eta = \frac{a}{h_z} \quad \text{for constant } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

本講演では、パラメータ u, v のスケール変換で $a = \frac{1}{2}$ とする：

$$\eta = \frac{1}{2h_z}. \tag{2.4}$$

このとき、双等温座標をもつ極小曲面（ただし「平面」を除く）の可積分方程式 (Gauss 方程式) が Liouville 方程式となる。

$$\Delta\omega - e^{-2\omega} = 0. \tag{2.5}$$

以後、 (u, v) を双等温座標とし、自明な例である「平面」を除いて議論を進める。

3 Abresch's method for Liouville equation

ここから「平面的な曲率線をもつ極小曲面」を考察していく。まず、先行研究で知られている結果を述べておく：

Proposition 3.1 ([4], [5], [7]). 平面的な曲率線をもつ極小曲面は、平面、*Catenoid*、*Enneper* 曲面、*Bonnet* 曲面に限る。

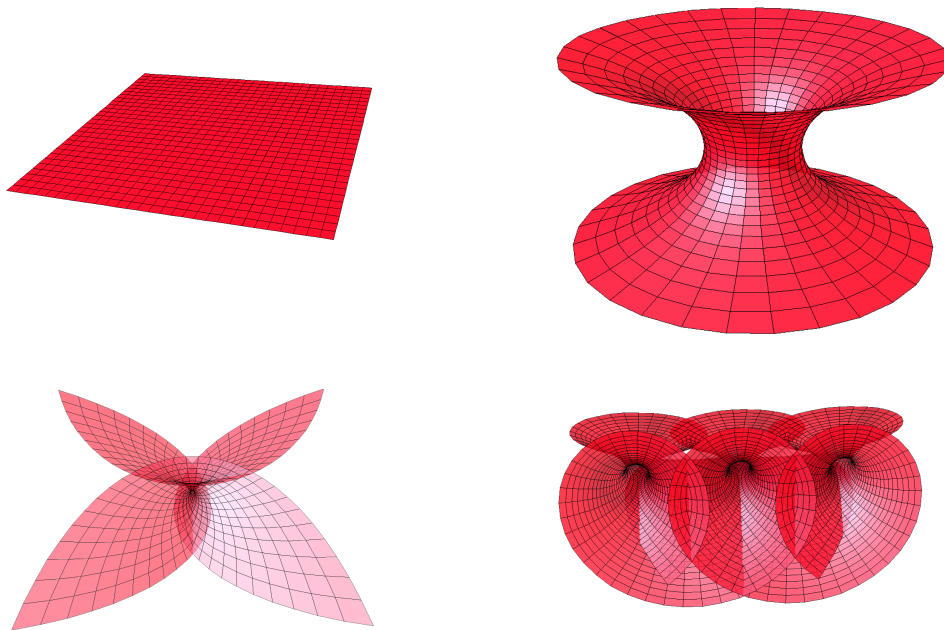


Fig. 1: 平面、Catenoid、Enneper 曲面、Bonnet 曲面 (left to right)

Proposition 3.1 の証明に関し、先行研究 [4], [5], [7] で使われている手法は「Orthogonal systems of cycles」と呼ばれるもので以下の事実に基づくものである。

Fact 3.1 ([4], [5], [7]).

極小曲面が平面的な曲率線をもつ

\iff 曲率線に沿った法ベクトル場は、2次元球面 S^2 内の平面的なベクトル場になる。

(*i.e.* 一つの円周上を動く。)

この手法は、すでに M. L. Leite によって 3次元 Lorentz 空間内の極大曲面の場合にも応用されている ([6])。しかし、M. L. Leite の研究でも述べられているように、Lorentz 空間内の極大曲面の場合、法ベクトル場は 2次元双曲面 \mathbb{H}^2 内のベクトル場になり、非常に煩雑な分類が必要になっている(「円」の定義が変わるため)。

一方、 \mathbb{R}^3 内の「平面的な曲率線をもつ平均曲率が零でない一定曲面」の分類は、U. Abresch によって研究され、完全な分類が存在する ([1])。彼の研究の少し前に発見された「Wente トーラス」もこの分類に入っており、さらに Delaunay 曲面 (CMC 回転面) や柱面的パブルトン (柱面の Bäcklund 変換) などの曲面も彼の分類に含まれている (Fig.2)。U. Abresch は偏微分方程式の専門家であり、彼はその技術を用いて「平面的な曲率線をもつ平均曲率が零でない一定曲面」が楕円関数を用いて構成できることを示し、解析的分類を行った。

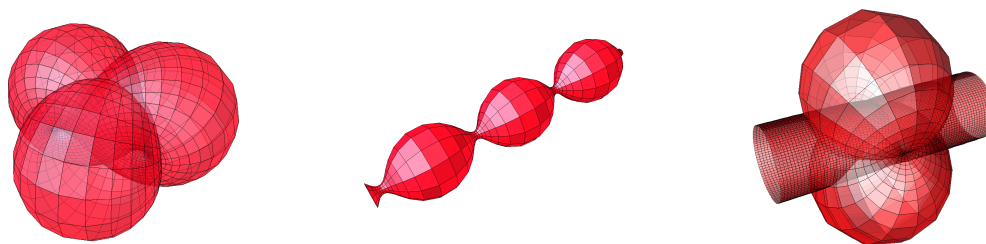


Fig. 2: Wente トーラス、Delaunay 曲面 (Unduloid)、柱面的パブルトン (left to right)

この章では、平面的な曲率線をもつ極小曲面に対し、U. Abresch の解析的分類法を用いる。まず始めに、極小曲面が平面的な曲率線をもつための条件を $\omega(u, v)$ を使って記述すると以下のようになる。

Lemma 3.1 ([2]). $X(u, v)$ を双等温座標をもつ極小曲面とし、計量を $I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2)$ とする。そのとき、以下が成立する。

$$\begin{aligned} & u \text{ 方向の曲率線が平面的} \\ \iff & v \text{ 方向の曲率線が平面的} \\ \iff & \omega_{uv} + \omega_u \omega_v = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

よって、平面的な曲率線をもつ極小曲面の構成や分類は、式 (2.5) と (3.1) を満たす $\omega(u, v)$ を見つければよい:

$$\begin{cases} \Delta\omega - e^{-2\omega} = 0 \\ \omega_{uv} + \omega_u \omega_v = 0 \end{cases} . \tag{3.2}$$

Lemma 3.2 ([2]). $X(u, v)$ を双等温座標をもつ極小曲面とし、計量を $I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2)$ とする。そのとき、以下が成立する。

$X(u, v)$ が平面的な曲率線をもつ極小曲面

\iff

$$\omega(u, v) = \log \left(\frac{1 + f(u)^2 + g(v)^2}{f_u(u) + g_v(v)} \right),$$

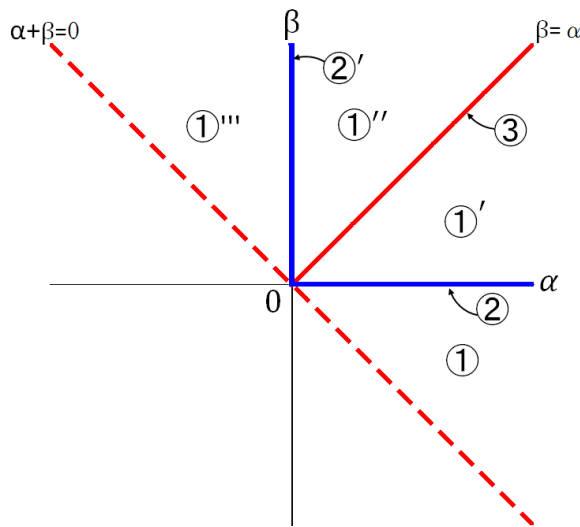
where

$$f(u) := \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \sinh(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}u), \quad g(v) := \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \sinh(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}v)$$

for constants $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $\alpha + \beta > 0$.

この Lemma 3.2 により、解析的分類が得られる。

Theorem 3.1 (平面的な曲率線をもつ極小曲面の解析的分類 [2]). 平面的な曲率線をもつ極小曲面は自明な例である「平面」または、Lemma 3.2 で与えられる計量の関数 $\omega(u, v)$ をもつ曲面になる。また、後者の曲面族は定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta > 0$ の選び方により、以下の分類表によって細分化される：



- ①, ①' : $\omega(u, v)$ は v 方向に周期的だが u 方向に周期的でない。Bonnet 曲面。
- ② : $\omega(u, v)$ は v 方向に一定で u 方向に周期的でない。Catenoid。
- ③ : $\omega(u, v)$ は u, v 方向に周期的でない。Enneper 曲面。
- ①'', ①''' : $\omega(u, v)$ は u 方向に周期的だが v 方向に周期的でない。Bonnet 曲面。
- ②' : $\omega(u, v)$ は u 方向に一定で v 方向に周期的でない。Catenoid。

4 Explicit Weierstrass data and Walter's method

前章では U. Abresch の方法で解析的分類を行ったが、極小曲面の研究において重要になるのが、Weierstrass データ (h, η) である。このデータを見つめることができれば、表現公式で曲面の具体的なパラメータ表示が得られる (Proposition 2.1)。前章では、「平面的な曲率線をもつ平均曲率が零でない一定曲面」の研究を参考にしたので、この章でも「Wente トーラスの具体的なパラメータ表示」を求めた R. Walter の手法 ([8]) を、平面的な曲率線をもつ極小曲面に対し応用する。R. Walter は、回転面でない Wente トーラスにも「軸」と呼べるものが存在し、その軸の位置を正規化してパラメータ表示を求めた。この手法を応用することで、平面でない場合に平面的な曲率線をもつ極小曲面に対しても「軸」が存在することを示した：

Lemma 4.1 ([2]). $X(u, v)$ を双等温座標をもつ極小曲面とし、計量を $I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2)$ とする。

$$\omega_u \neq 0 \quad (\text{resp. } \omega_v \neq 0)$$

⇒ 以下を満たすベクトル \mathbf{v}_1 (resp. \mathbf{v}_2) がただ一つ存在する：

$$\langle \mathbf{m}(u, v), \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{m}_v(u, v), \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \quad (\text{resp. } \langle \mathbf{n}(u, v), \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{n}_u(u, v), \mathbf{v}_2 \rangle = 0)$$

ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3$ 内の内積、 $\mathbf{m}(u, v) := X_u \times X_{uu}$ (resp. $\mathbf{n}(u, v) := X_v \times X_{vv}$)。この \mathbf{v}_1 (resp. \mathbf{v}_2) を「軸」と呼ぶ。

この Lemma 4.1 を適用して以下の Weierstrass データが得られる。

Theorem 4.1 (平面的な曲率線をもつ極小曲面の Weierstrass データ (平面を除く) [2]). 平面的な曲率線をもつ極小曲面の Weierstrass データ (h, η) は以下で与えられる：

$$h(u, v) = \frac{(\alpha + \beta) \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}(u + iv)\right)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \quad \eta(u, v) = \frac{1}{h_u(u, v) - ih_v(u, v)}. \quad (4.1)$$

ただし、 α, β は、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta > 0$ となる定数。

Corollary 4.1 (平面的な曲率線をもつ極小曲面の変形族). 式 (4.1) は、 u, v のパラメータ変換で $\alpha = \cos(\theta), \beta = \sin(\theta)$ ($-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$) と正規化できる。このとき、

$$h(u, v) = \frac{(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\cos(2\theta)}(u + iv)\right)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}, \quad \eta(u, v) = \frac{1}{h_u(u, v) - ih_v(u, v)}. \quad (4.2)$$

この Weierstrass データは θ に関し、連続であり、このデータを用いて曲面の変形族が得られる。

5 Summary

先行研究の結果である Proposition 3.1 から、Corollary 4.1 にあるような曲面の変形族の存在はなかなか見つけづらい。実際、よく知られている Catenoid の Weierstrass データ $(h, \eta) = (e^z, e^{-z})$ と、Enneper 曲面の $(h, \eta) = (z, 1)$ の間のデータの連続変形も見つけるのは困難に思う。しかし、今回の結果により、Catenoid と Enneper 曲面、Bonnet 曲面は「曲率線が平面的である」という性質を保ったまま変形できることが証明できた。講演の際は、どのようにこれらの曲面が移りあうかアニメーションを見せながら議論できればと考えている。

Bibliography

- [1] U. Abresch, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, J. Reine Angew. Math. **374** (1987).
- [2] J. Cho and Y. Ogata, *Classification and deformation of minimal and maximal surfaces with planar curvature lines*, preprint.
- [3] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **6**(4), 633-668 (1998).
- [4] L. P. Eisenhart, *A treatise on differential geometry on curves and surfaces*, Dover Reprint (1960).
- [5] A. Enneper, *Untersuchungen über die Flächen mit plannen und sphärischen Krümmungslinien*. Abh. Königl. Ges. Wissensch. Göttingen **23** (1878) and **24** (1880).
- [6] M. L. Leite, *Surfaces with planar lines of curvature and orthogonal systems of cycles*, J. Math. Anal. Appl. **421**, no. 2, 1254-1273, (2015).
- [7] J. C. C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces*, Cambridge University Press., vol. 1, (1989).
- [8] R. Walter, *Explicit examples of the H-problem of Heinz Hopf*, Geom. Dedicata **23**, 187-213 (1987).
- [9] K. T. Weierstrass, *Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*, Moatsber. Berliner Akad., 612-625 (1866).
- [10] H. C. Wente, *Counterexample to a conjecture of a H. Hopf*, Pacific J. Math., **121**, no. 1, 193-243 (1986)