

Compact Stein surfaces as branched coverings of D^4 with same branch sets

大場 貴裕 (Takahiro Oba) (東京工業大学)*

概 要

Loi と Piergallini によって, 4次元多様体がコンパクト Stein 曲面であることと, 正ブレイド状曲面と呼ばれる曲面で分岐する4次元円盤 D^4 の単純分岐被覆であることは同値であることが示された. しかし, Stein 構造の正ブレイド状曲面に対する振る舞いは未だ解明されていないことが多い. 本稿では, 正ブレイド状曲面とその曲面上分岐する被覆の微分同相類は同じであるが, Stein 構造は異なるという構成例を紹介する.

1. 背景

Stein 多様体とは \mathbb{C}^N にプロパーかつ正則に埋め込みができる複素多様体 (W, J) のことである. 任意の Stein 多様体は下に有界でかつプロパーな狭義多重劣調和関数と呼ばれる実数値関数 $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ を持つ. コンパクト Stein 曲面は, 複素 2 次元の Stein 多様体 (W, J) の中のコンパクトな境界付き部分多様体であり, かつ上のような W 上の狭義多重劣調和関数 f のあるサブレベル集合 $f^{-1}([-\infty, c))$ として実現できる 4 次元多様体のことである. 複素構造の制約から, コンパクト Stein 曲面の位相幾何学的な手法を用いた研究は難しく思われる. しかし, Eliashberg[El] と Gompf[Go] による, コンパクト Stein 曲面のハンドル分解の条件や, そのハンドル分解を図示する Kirby 図式の描き方など, 知られていることは少なくない. 中でも, Loi と Piergallini[LP], Akbulut と Ozbagci[AO] による, コンパクト Stein 曲面と Lefschetz ファイバー空間の間の対応関係を示した結果は近年のコンパクト Stein 曲面の研究に盛んに用いられてきた. ここで, Lefschetz ファイバー空間とは, 曲面をファイバーとする 2 次元円盤 D^2 上のファイバー空間で, ノード付き曲面を特異ファイバーとして含む. Loi と Piergallini らはさらに, コンパクト Stein 曲面とブレイド状曲面の対応関係についても [LP] において示している. 彼らは, 4 次元多様体がコンパクト Stein 曲面の構造を持つことと, 正ブレイド状曲面上分岐する単純被覆の全空間であることは同値であることを示した. ブレイド状曲面は, ブレイドモノドロミーやチャート表示などという位相幾何学的な手法で扱う一方で, ブレイド状曲面を用いたコンパクト Stein 曲面の研究は著者の知る限りほとんどなされていない.

そこで, 次のような問題を考える: 正ブレイド状曲面について, その上で分岐する被覆を 2 つ以上考えたときに, それらの全空間が互いに微分同相であり, かつ Stein 構造が相異なるものを与える正ブレイド状曲面は存在するか. 本稿では, この問いの肯定的な答えとして実際に構成したブレイド状曲面の例を紹介する. なお, 多様体とその間の写像はすべて滑らかと仮定する.

本研究は科研費 (課題番号: 15J05214) の助成を受けたものである.

* 〒 152-8551 東京都目黒区大岡山 2 - 1 2 - 1

e-mail: oba.t.ac@m.titech.ac.jp

2. 分岐被覆とブレイド状曲面

\mathbb{D} を \mathbb{C} 内の単位円盤とする. 写像 q_2, p_2 を次のように定める:

$$q_2 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : z \mapsto z^2,$$

$$p_2 := q_2 \times id : \mathbb{D} \times D^n \rightarrow \mathbb{D} \times D^n$$

M^n, \tilde{M}^n をコンパクト n 次元多様体とし, さらに $p : \tilde{M} \rightarrow M$ をその間の全射とする.

$$S_p := \{x \in \tilde{M} \mid \text{rank}(T_x p) < n\}, N := p(S_p), \tilde{N} := p^{-1}(N),$$

としたとき, 単純分岐被覆を次のように定める:

定義 2.1. 写像 $p : \tilde{M} \rightarrow M$ が N 上分岐する次数 d の単純分岐被覆 (*simple branched covering*) であるとは, p が以下の条件を満たすときである:

1. $p|_{\tilde{M} - \tilde{N}} : \tilde{M} - \tilde{N} \rightarrow M - N$ は通常の数 d の被覆である;
2. N は余次元 2 の部分多様体である;
3. 任意の $x \in \tilde{N}$ と $p(x) \in N$ の周りで, 次の条件を満たす:

- $x \notin S_p$ のとき, p は局所微分同相写像である;
- $x \in S_p$ のとき, 座標近傍 $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ と (U, φ) が存在して, 次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{U}, \tilde{U} \cap \tilde{N}) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (\mathbb{D} \times D^{n-2}, 0 \times D^{n-2}) \\ p \downarrow & & \downarrow p_2 \\ (U, U \cap N) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{D} \times D^{n-2}, 0 \times D^{n-2}). \end{array}$$

上の N のことを分岐値集合 (branch value set) とよぶ.

次にブレイド状曲面についての復習をする. より詳しい説明は [Ru], [Ka2, Chapter 16, 17], [APZ, Section 3] にあるので参照して頂きたい. D_1^2, D_2^2 を標準的な向きを持つ有向円盤とする.

定義 2.2. $D_1^2 \times D_2^2$ にプロパー, すなわち $S \cap \partial(D_1^2 \times D_2^2) = \partial S$ を満たすように埋め込まれた曲面 S , が次数 m のブレイド状曲面 (*braided surface*) であるとは, 第 1 射影 $pr_1 : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_1^2$ の S への制限が次数 m の単純分岐被覆であるものをいう.

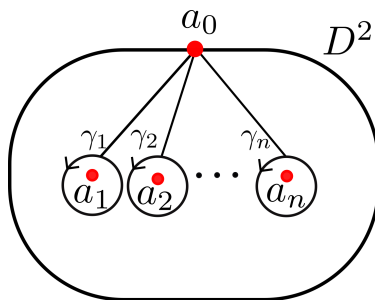


図 1: Hurwitz 生成システム

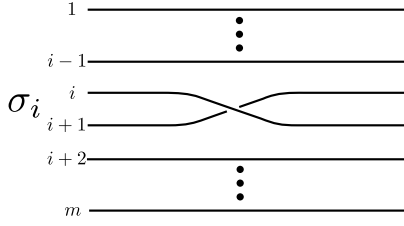


図 2: 標準的生成元 $\sigma_i \in B_m$

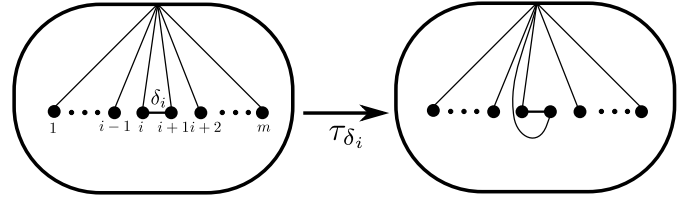


図 3: 弧 δ_i に沿う右手ハーフツイスト τ_{δ_i}

a_0 を境界 ∂D_1^2 の点とし, $Q_S := \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ を $p_S := pr_1|_S$ の分岐値集合とする. $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ を次を満たす a_0 を基点とするループたちの順序付き組とする: $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ は $\pi_1(D_1^2 \setminus Q_S, a_0)$ の生成系で, 各 γ_i は a_i のみを囲み, 積 $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$ が ∂D_1^2 に向きを込めてホモトピックである. このような $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ を $\pi_1(D_1^2 \setminus Q_S, a_0)$ の Hurwitz 生成システム (Hurwitz generating system) という (図 1). m 次ブレイド群 (braid group) B_m を m 個の点付き円盤 D_m の写像類群 (mapping class group) \mathcal{M}_m と同一視して考える. ここで写像類群 \mathcal{M}_m とは, D_m の自己微分同相写像のアイソトピー類全体が成す群のことである (ただし, アイソトピーは m 個の点からなる集合を保つものとする). 実際, B_m の標準的生成元 σ_i (図 2) に対し, \mathcal{M}_m の弧 δ_i に沿う右手ハーフツイスト (right-handed half-twist) (図 3) を対応させることでこれらの同一視が得られる. $D_2^2(a) := pr_1^{-1}(a)$ とおくと, このとき, 任意の点 $a \in D_1^2 \setminus Q_S$ について, $D_2^2(a) \cap S = p_S^{-1}(a) = \{m \text{ 点}\}$ である. このことから, 各 γ_i に沿って一周すると, m 個の点の“軌跡”として $\mathcal{M}_m \cong B_m$ の元 β_i が得られる. このようにして定まる準同型 $\rho_S : \pi_1(D_1^2 \setminus Q_S, a_0) \rightarrow B_m$ を S のブレイドモノドロミー (braid monodromy) と呼ぶ. また, 組 $(\rho_S(\gamma_1), \rho_S(\gamma_2), \dots, \rho_S(\gamma_k)) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ のことも S のブレイドモノドロミーと呼ぶことにする. いま, p_S が単純分岐被覆であることから, 各 i について, ある $w_i \in B_m, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ が存在して, $\rho_S(\gamma_i) = w_i^{-1} \sigma_1^{\varepsilon_i} w_i$ と書けることが知られている. ブレイド状曲面 S が正 (positive) であるとは, すべての i に対し, $\varepsilon_i = +1$ であるときをいう. ここではブレイド状曲面からブレイドモノドロミーを構成したが, 逆に上のような組を与えたときにそれをブレイドモノドロミーとするブレイド状曲面が構成できることに注意しておく (例えば, [Ka1, LEMMA 3] を見よ).

$p : X \rightarrow D_1^2 \times D_2^2 \approx D^4$ を正ブレイド状曲面 S 上分岐する単純分岐被覆とする. このとき, $f := pr_1 \circ p : X \rightarrow D^2$ は Lefschetz ファイバー空間 (Lefschetz fibration) という写像になる (Lefschetz ファイバー空間については, 例えば [Go, Chapter 8] を参照せよ). f の特異値集合と Q_S は一致し, f のファイバーは $f^{-1}(a_0) = p^{-1}(D_2^2(a_0))$ である (図 4). $p|_{p^{-1}(D_2^2(a_0))} : p^{-1}(D_2^2(a_0)) \rightarrow D_2^2(a_0)$ が $S \cap D_2^2(a_0)$ 上分岐する分岐被覆であることに注意しておく. また, f のモノドロミーは S のブレイドモノドロミーの持ち上げである. 実際, 右手ハーフツイストの持ち上げは右手 Dehn ツイストであることが確認できる. 詳しくは [LP, Proposition 1] を参照して頂きたい.

3. 主結果

$D_1^2 \times D_2^2$ の単純分岐被覆を構成するにあたり補題を 1 つ与える. $q : \Sigma \rightarrow D^2$ を次数 d の単純分岐被覆とする. 分岐値集合 Q_q の濃度を m とする. 上のようにブレイド群 B_m を写像類群 \mathcal{M}_m と同一視し, $\beta \in B_m$ に対し定まる元を $h_\beta \in \mathcal{M}_m$ と書く.

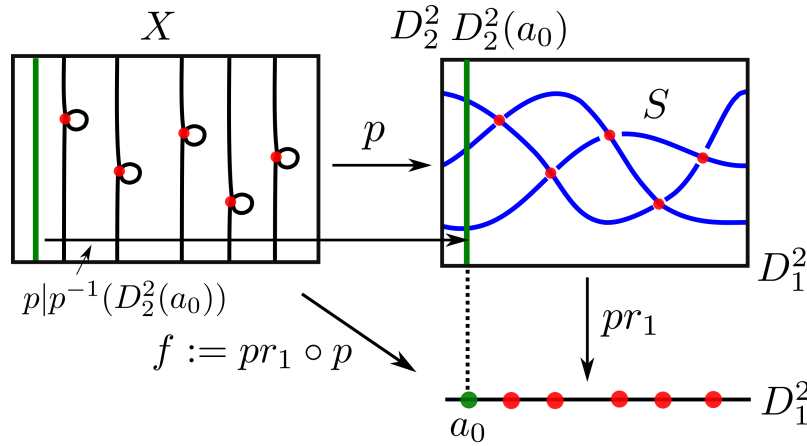


図 4: 左右の長方形は各々 $X, D_1^2 \times D_2^2$ を表し, その中の点は f, p_S の特異点を表す.

$h_\beta \in \mathcal{M}_m$ または $\beta \in B_m$ が q に関し持ち上げ可能 (liftable) であるとは, 微分同相写像 $H: \Sigma \rightarrow \Sigma$ と, $[h] = h_\beta$ なる微分同相写像 $h: D^2 \rightarrow D^2$ が存在し, $q \circ H = h \circ q$ を満たすときをいう. ただし, ここでの $\mathcal{M}_m \cong B_m$ は, D_1^2 の m 点から成る Q_q を固定する写像類群として考えている.

補題 3.1. $S \subset D_1^2 \times D_2^2$ を正ブレイド状曲面とし, そのブレイドモノドロミーを $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ とする. a_0 を ∂D_1^2 の点とし, $q: \Sigma \rightarrow D_2^2(a_0) \subset D_1^2 \times D_2^2$ を $S \cap D_2^2(a_0)$ 上分岐する次数 d の単純分岐被覆とする. もし, 各 β_i が q に関し持ち上げ可能ならば, S 上分岐する $D_1^2 \times D_2^2 \approx D^4$ の次数 d の単純分岐被覆 $p: X \rightarrow D^4$ が存在し, $p|_{p^{-1}(D_2^2(a_0))} = q$ である.

証明の概略. $b_0 \in \partial D_2^2(a_0)$ をとり, $\pi_1(D_2^2(a_0) \setminus S, (a_0, b_0))$ に対し, Hurwitz 生成システム (x_1, x_2, \dots, x_m) を取る. 補題を示すには, 表現 $\rho: \pi_1(D^4 \setminus S, (a_0, b_0)) \rightarrow \mathfrak{S}_d$ が q の被覆モノドロミー $\rho_q: \pi_1(D_2^2(a_0) \setminus S, (a_0, b_0)) \rightarrow \mathfrak{S}_d$ から定まることを示せばよい. すると, ρ を被覆モノドロミーとする D^4 上の分岐被覆が構成できる. ただし, \mathfrak{S}_d は d 次対称群である. $\pi_1(D^4 \setminus S, (a_0, b_0))$ は, $\iota: (D_2^2(a_0) \setminus S, (a_0, b_0)) \hookrightarrow (D^4 \setminus S, (a_0, b_0))$ を包含写像としたとき, $\iota_*(x_1), \iota_*(x_2), \dots, \iota_*(x_m)$ で生成され, 表示に関しても S のブレイドモノドロミーから計算できることが知られている ([Fo, p. 133], [Ru, Proposition 4.1]). 後は, ブレイドモノドロミーの各成分が q に関して持ち上げ可能であることを用いて, ρ が構成できることを示せばよい. \square

定理 3.2 ([Ob]). N を 2 以上の任意の自然数とする. このとき, 正ブレイド状曲面 $S \subset D_1^2 \times D_2^2$ が存在し, S を分岐値集合とする単純分岐被覆 $p_i: X_i \rightarrow D^4$ ($i = 1, 2, \dots, N$) で次を満たすものが存在する:

1. 分岐被覆 p_i の次数は全て同じである;
2. X_1, X_2, \dots, X_N は互いに微分同相である;
3. 単純分岐被覆 p_i に付随する X_i 上の Stein 構造を J_i とすると, $i \neq j$ のとき J_i と J_j はホモトピックでない.

証明の概略 ($N = 2$ のとき). 8 次ブレイド群 B_8 の元, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ を図 5 のように定義する. ただし, 図 5 の単純弧たちは, B_8 と \mathcal{M}_8 を同一視したとき, 各 $\beta_i \in B_8$

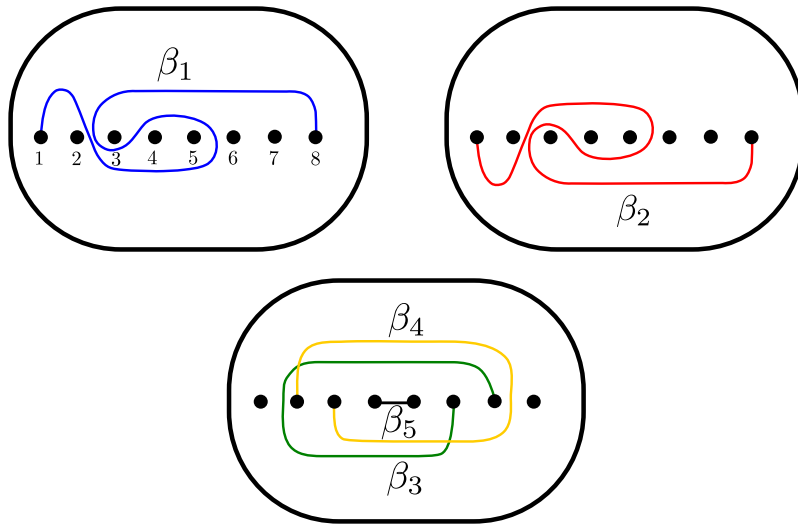


図 5: $h_{\beta_1}, \dots, h_{\beta_5} \in \mathcal{M}_8$ を生成する弧たち.

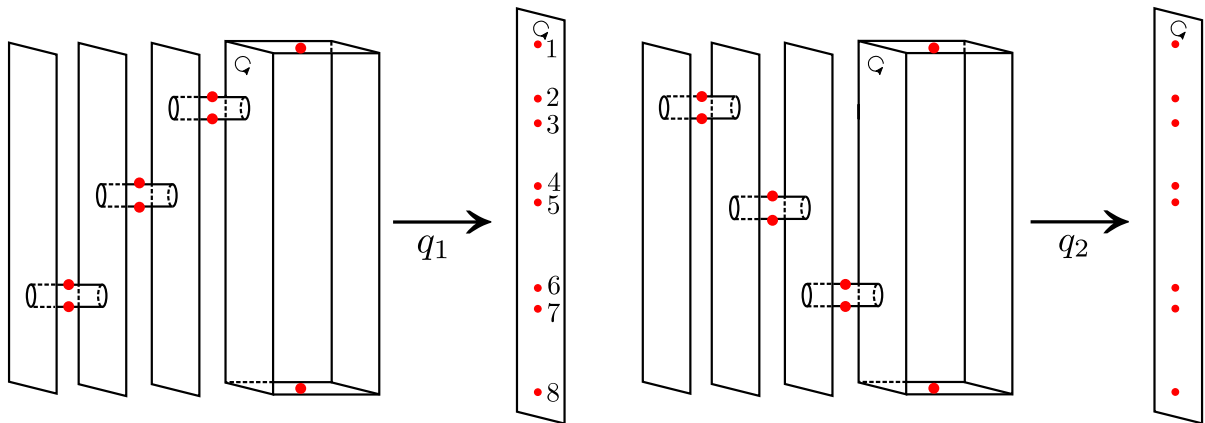


図 6: 単純分岐被覆 q_1, q_2 .

に対応する \mathcal{M}_8 の元, 右手ハーフツイストを生成する弧を表してる. 正ブレイド状曲面 S を, ブレイドモノドロミーが組 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ であるものとして定義する. $q_1, q_2 : \Sigma \rightarrow D_2^2(a_0)$ を, 図 6 で表される次数 5 の単純分岐被覆とする. (ブレイド $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ の具体的な表示や, 単純分岐被覆 q_1, q_2 の被覆モノドロミー等は [Ob, Theorem 1.1] の証明を参照せよ.) $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ は q_1, q_2 に関し持ち上げ可能であることが簡単に確かめることができる. したがって補題 3.1 より, 各 q_i に対し単純分岐被覆 $p_i : X_i \rightarrow D^4$ が定まる.

X_1 と X_2 が微分同相であることを示す. これには各 p_i から定まる X_i 上の Lefschetz ファイバー空間 $pr_1 \circ p_i$, およびその境界として得られる ∂X_i のオープンブック分解の情報を用いて示すことができる.

p_1, p_2 から定まる Stein 構造 J_1, J_2 が異なることは, 第 1 Chern 類を計算することで分かる. X_i 上の Lefschetz ファイバー空間の情報から Kirby 図式を描くことができ, その図式から Chern 類を計算することができる. 実際, $c_1(X_1, J_1) \neq 0, c_1(X_2, J_2) = 0$ となる. J_1, J_2 がホモトピックであれば Chern 類は一致する. よって, J_1, J_2 はホモト

ピックでない。

□

最後に系を1つ紹介する。定理3.2において境界 $\partial(D_1^2 \times D_2^2)$ に目を向けてみる。まず、有向3次元多様体 M 上の平面場 ξ が接触構造 (contact structure) であるとは、 M 上の1次微分形式 α が存在し、 $\xi = \text{Ker}(\alpha)$ かつ M の向きに関し $\alpha \wedge d\alpha > 0$ となるときをいう。このとき、組 (M, ξ) を接触多様体 (contact manifold) という。接触多様体 (M, ξ) の中の有向絡み目 L が横断的絡み目 (transverse link) であるとは、各点 $x \in L$ において、 $T_x L$ が ξ_x に横断的である絡み目である。接触多様体、横断的絡み目についてより詳しいことは、例えば [OS, Section 4], [Ge] を参照して頂きたい。

$\partial(D_1^2 \times D_2^2) \approx S^3$ の標準的接触構造 ξ_{std} について、ブレイド状曲面の境界は横断的絡み目になっている。さらに、定理3.2の証明において構成されたコンパクト Stein 曲面たち $(X_1, J_1), \dots, (X_2, J_2)$ は、境界に現われる接触構造が互いにアイトピックでないように構成されている。ゆえに以下の系が得られる。

系 3.3. N を2以上の任意の自然数とする。このとき、標準的接触構造を持つ3次元球面 S^3 の中の横断的絡み目 L が存在し、 L を分岐集合とする単純分岐被覆 $p_i : M_i \rightarrow S^3$ ($i = 1, 2, \dots, N$) で次を満たすものが存在する：

1. 分岐被覆 p_i の次数は全て同じである；
2. M_1, M_2, \dots, M_N は互いに微分同相である；
3. 単純分岐被覆 p_i に付随する M_i 上の接触構造を ξ_i とすると、 $i \neq j$ ならば ξ_i と ξ_j はアイトピックでない。

謝辞 第12回数学総合若手研究集会での講演の機会、また本稿の執筆の機会を与えてくださいました、北海道大学の世話人の方々に感謝申し上げます。

参考文献

- [APZ] N. Apostolakis, R. Piergallini, and D. Zuddas, *Lefschetz fibrations over the disc*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **107** (2013), no. 2, 340–390.
- [AO] S. Akbulut and B. Ozbagci, *Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces*, Geom. Topol. **5** (2001), 939–945.
- [El] Y. Eliashberg, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2* , Internat. J. Math. **1** (1990), no. 1, 29–46.
- [Fo] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962), pp. 120–167.
- [Ge] H. Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Stud. Adv. Math. **109**, Cambridge Univ. Press, 2008.
- [Go] R. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 2, 619–693.
- [Ka1] S. Kamada, *On braid monodromies of non-simple braided surfaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **120** (1996), no. 2, 237–245.
- [Ka2] S. Kamada, *Braid and knot theory in dimension four*, Mathematical Surveys and Monographs, **95**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [LP] A. Loi and R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4* , Invent. Math. **143** (2001), no. 2, 325–348.
- [Ob] T. Oba, *Compact Stein surfaces as branched covers with same branch sets*, arXiv:1508.01020.

- [OS] B. Ozbagci and A. Stipsicz, *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, Bolyai Soc. Math. Stud. **13**, Springer-Verlag, 2004.
- [Ru] L. Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), no. 1, 1–37.