局所 Hardy 空間の元を外力項とする Rivière 型方程式の弱解の正則性

野島 崇史（Takafumi Nojima）
東京工業大学修士課程 2 年

1　導入

本稿で述べる結果と先行研究の説明の為, 与えられた関数 f による Poisson 方程式

$$-\Delta u = f \tag{1.1}$$

の $W^{1,2}$-弱解 u の正則性について考えよう．ここで $W^{k,p}$ は Sobolev 空間であり, 添え字 k, p はそれぞれ弱い意味での微分可能回数と弱微分の p 乗可積分性を意味する．今は方程式と Sobolev 空間の定義域はさほど重要ではないので記述を省略した．f の可積分性は u の正則性に影響を与える．例えば f が L^2_{loc}-関数（局所 2 乗可積分関数）の場合は差分法により u の高階の弱微分可能性が示せ, u が $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}$-関数と分かる．また, Calderón-Zygmund の特異積分論により $1 < p < \infty$ の場合

$$f \text{ が } L^p_{\mathrm{loc}}\text{-関数ならば } u \text{ は } W^{2,p}_{\mathrm{loc}}\text{-関数} \tag{1.2}$$

なる事が分かる [3, Chapter 9]．一方で $p = 1$ のときには (1.2) は成り立たない事が分かっている．次のような反例が挙げられる．

例 1.1 ($p = 1$ のとき (1.2) 不成立の例)**.** B_1 を $\mathbb{R}^2$ の単位円盤とし, $f_0 \in W^{1,2}(B_1) \cap C^\infty\left(\overline{B_1} \setminus \{0\}\right)$ を $f_0(x) := \log\log\left(e|x|^{-1}\right)$ として定める．$x \in \overline{B_1} \setminus \{0\}$ に対して f_0 の微分は

$$\nabla f_0(x) = -\frac{x}{|x|^2 \log\left(e|x|^{-1}\right)},\ \Delta f_0(x) = -\frac{1}{\left\{|x| \log\left(e|x|^{-1}\right)\right\}^2} = -|\nabla f_0(x)|^2$$

となる事が計算により求められる．また Gauss の発散定理を使う事で, 超関数の意味で

$$-\Delta f_0 = |\nabla f_0|^2 \quad \text{in } B_1$$

が成り立つと分かる．$f := |\nabla f_0|^2,\ u := f_0$ と置けば $u \in W^{1,2}(B_1)$ で方程式

$$-\Delta u = f \quad \text{in } B_1$$

の弱解となっている．しかし $u \notin W^{2,1}\left(B_{1/2}\right)$ である．実際

$$|\nabla^2 u(x)| \geq \frac{1}{2|x|^2 \log\left(e|x|^{-1}\right)}$$

が $B_1 \backslash \{0\}$ 上で成り立つことから

$$\begin{aligned}\int_{B_{1/2}} |\nabla^2 u| dx &\geq \int_{B_{1/2}} \frac{1}{2|x|^2 \log\left(e|x|^{-1}\right)} dx \\ &= 2\pi \int_{(0,1/2)} \frac{1}{2r^2 \log\left(er^{-1}\right)}\ r dr = +\infty.\end{aligned}$$

このように (1.2) は $p = 1$ では成立しない．しかし, 特殊な表示を持つ L^1-関数 f に絞って考えると, (1.2) の $p = 1$ のときに相当する結果が示せる場合がある．次は div-curl lemma と呼ばれる定理の一部である．証明は [5] を参照せよ．

命題 1.2. B_1 を $\mathbb{R}^2$ の単位円盤とし, $f_1, f_2 \in W^{1,2}(B_1)$ とする．このとき, 方程式

$$-\Delta u = \det\left(\nabla f_1, \nabla f_2\right) \tag{1.3}$$

の $W^{1,2}$-弱解 u について, $u \in W^{2,1}_{\text{loc}}(B_1)$ である．

(1.3) の右辺について, $f_1, f_2 \in W^{1,2}(B_1)$ なので

$$\det\left(\nabla f_1, \nabla f_2\right) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \in L^1(B_1).$$

しかし, それ以上の可積分性は一般には望めない．その為, 例 1.1 で見たように Caldelón-Zygmund 理論からは $u \in W^{2,1}_{\text{loc}}(B_1)$ とは分からない．それにもかかわらず弱解の正則性が上がるのは, (1.3) の右辺がヤコビアンという特殊な表示を持っている為である．

命題 1.2 は「Caldelón-Zygmund 理論を適用して弱解の正則性を調べる事は出来なくても, (1.3) のように方程式が特殊な表示を持つときは, 弱解の正則性が上がる」事を意味するが, それでは他にどのような方程式の特殊な表示があるだろうか．

2007 年に方程式の弱解の正則性が上がる新たな表示が発見された [7]．発見者である Rivière にちなみ, その表示を持つ方程式を総称して Rivière 型方程式と呼ぶ．本稿の主結果は Rivière 型方程式に関係するものである．次の第 2 節では Rivière 型方程式について説明をする．先行研究と主結果については第 3 節に記す．

2 Rivière 型方程式

$m \geq 2$, B_1 を $\mathbb{R}^2$ の単位円盤, $\mathfrak{so}(m)$ を m 次反対称行列全体の集合とする. また, $\Omega = (\Omega_{i,j})_{1\leq i,j\leq m} \in L^2\left(B_1; \mathfrak{so}(m) \otimes \wedge^1\mathbb{R}^2\right)$ とする. すなわち,

$$\Omega_{i,j} \in L^2\left(B_1; \mathbb{R}^2\right),\ \Omega_{j,i} = -\Omega_{i,j}$$

とする. m-連立偏微分方程式

$$-\Delta u^i = \sum_{j=1}^{m} \langle \Omega_{i,j}, \nabla u^j \rangle_{\mathbb{R}^2} \quad \text{in } B_1 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{2.1}$$

を考えよう. (2.1) の右辺を $(\Omega.\nabla u)^i$ とおく. すると (2.1) は

$$-\Delta u = \Omega.\nabla u \quad \text{in } B_1 \tag{2.2}$$

と書き表せる. (2.2) を Rivière 型方程式と呼ぶ.

注意 2.1. (2.1) の右辺をこのように置いたのは, 形式的に m 次正方行列と列ベクトルの行列の積と見立てた為である.

(2.2) の弱解 $u \in W^{1,2}(B_1; \mathbb{R}^m)$ が与えられたとして, その正則性を考えよう. まず, (2.2) の右辺は $L^1(B_1; \mathbb{R}^m)$ に属す事が直ちに分かる. しかし 一般論からはそれ以上の可積分性は分からず, 弱解 u の高階の弱微分可能性は分からない. しかし Rivière は Ω の反対称性という構造が u の正則性を上げることを見抜き, 次の定理を証明した.

定理 2.2 ([7])**.** B_1 を $\mathbb{R}^2$ の単位円盤, $m \geq 2$, $1 \leq p < 2$, $\Omega \in L^2\left(B_1; \mathfrak{so}(m) \otimes \wedge^1\mathbb{R}^2\right)$ とする. このときある $\epsilon = \epsilon(m,p) > 0$ が存在して, $||\Omega||_{L^2(B_1)} \leq \epsilon$ が成り立つならば

$$-\Delta u = \Omega.\nabla u \quad \text{in } B_1$$

の弱解 $u \in W^{1,2}(B_1; \mathbb{R}^m)$ は $W^{2,p}\left(B_{1/2}; \mathbb{R}^m\right)$ に属す. さらにある $C = C(m,p) > 0$ が存在して, 次のように評価できる.

$$||u||_{W^{2,p}\left(B_{1/2}\right)} \leq C||u||_{L^1(B_1)}.$$

定理 2.2 と被覆の議論により $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(B_1; \mathbb{R}^m)$ と分かる.

3　主結果と関連する先行研究

記号は第 2 節と同じとする．Rivière 型方程式 (2.2) の右辺に外力項 f を加えた方程式

$$-\Delta u = \Omega.\nabla u + f \quad \text{in } B_1 \tag{3.1}$$

と, (3.1) の弱解 $u \in W^{1,2}(B_1;\mathbb{R}^m)$ について考える．(3.1) において $\Omega \equiv O \ \ \text{in } B_1$ とすると m-連立 Poisson 方程式なので, f の属する関数空間に応じて得られる (3.1) の弱解の性質は, Poisson 方程式の場合に類似すると予想される．(3.1) の弱解 u の正則性に関して以下の先行研究がある．弱解列のコンパクト性の研究, 調和写像や Dirac 調和写像への応用については [2, 4, 7, 8, 9, 10, 11] などを参照せよ.

· $f \in L\log L(B_1;\mathbb{R}^m)$ ならば $u \in W^{2,1}_{\text{loc}}(B_1;\mathbb{R}^m)$ [11]
· $f \in L^p(B_1;\mathbb{R}^m)$ $(1 < p < 2)$ ならば $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(B_1;\mathbb{R}^m)$ [11]
· $f \in L^2(B_1;\mathbb{R}^m)$ ならば $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(B_1;\mathbb{R}^m)$ は不成立. $f \equiv 0$ の場合で反例が挙げられる. [9, Chapter 4.3].

ここで

$$L\log L(B_1) := \left\{ f \in L^1(B_1) \;\middle|\; ||f||_{L\log L(B_1)} < \infty \right\},$$
$$||f||_{L\log L(B_1)} := \int_{B_1} |f| \log\left(e + |f|\cdot||f||^{-1}_{L^1(B_1)}\right) dx$$

としている．$\left(L\log L(B_1), ||\cdot||_{L\log L(B_1)}\right)$ は Banach 空間となる事が知られており（[6, Theorem 3], [9, Chapter 2.7.2]）, また Lebesgue 空間と $L\log L(B_1)$ の間には

$$L^p(B_1) \ (p>1) \overset{\text{conti.}}{\hookrightarrow} L\log L(B_1) \overset{\text{conti.}}{\hookrightarrow} L^1(B_1) \tag{3.2}$$

なる包含関係がある事も知られている.

(3.1) の弱解の $W^{2,1}$-正則性については $f \in L^1(B_1;\mathbb{R}^m)$ の場合は例 1.1 で見たように一般には得られない．（$\Omega \equiv O \ \ \text{in } B_1$ とすると (3.1) は Poisson 方程式となる為）一方で $L\log L(B_1;\mathbb{R}^m)$ という $L^1(B_1;\mathbb{R}^m)$ より少しだけ良い関数空間に属する f を与えた場合は弱解 u は $u \in W^{2,1}_{\text{loc}}(B_1;\mathbb{R}^m)$ に属する事が上述の先行研究で判明している.

そこで本稿では外力項 f の属する関数空間として, 更に $L^1(B_1;\mathbb{R}^m)$ に近い局所 Hardy 空間 $h^1(B_1;\mathbb{R}^m)$ を与えても弱解の $W^{2,1}$-正則性が得られるかどうかを考察する.

局所 Hardy 空間は次で定義される関数空間である.

$$h^1_\phi(B_1) := \left\{ f \in L^1(B_1) \;\middle|\; ||f||_{h^1_\phi(B_1)} := ||m_{B_1,\phi}[f]||_{L^1(B_1)} < \infty \right\}.$$

ここで各 $f \in L^1(B_1)$, $\int_{\mathbb{R}^2} \phi dx \neq 0$ なる $\phi \in C_c^\infty(B_1)$, $t > 0$ に対して,

$$\phi_t(x) := t^{-2}\phi(x/t),$$
$$m_{B_1,\phi}[f] : B_1 \ni x \mapsto \sup\{|\phi_t * f(x)| \mid 0 < t < 1 - |x|\} \in \mathbb{R}$$

とおいた. $\left(h_\phi^1(B_1), ||\cdot||_{h_\phi^1(B_1)}\right)$ は Banach 空間となる [1]. 定義によると $||\cdot||_{h_\phi^1(B_1)}$ は ϕ の取り方に依存するが, ノルム同値になるという意味で同じ Banach 空間を与える. その為, $h^1(B_1)$, $||\cdot||_{h^1(B_1)}$ などと ϕ を省略して表記する. Lebesgue 空間, $L\log L(B_1)$ と $h^1(B_1)$ の間には

$$L\log L(B_1) \overset{\text{conti.}}{\hookrightarrow} h^1(B_1) \overset{\text{conti.}}{\hookrightarrow} L^1(B_1)$$

なる包含関係がある. (3.2) とあわせると次の包含関係が分かる.

$$L^p(B_1)\ (p>1) \overset{\text{conti.}}{\hookrightarrow} L\log L(B_1) \overset{\text{conti.}}{\hookrightarrow} h^1(B_1) \overset{\text{conti.}}{\hookrightarrow} L^1(B_1)$$

$h^1(B_1)$ は絶対値を取る事に関して閉じていない（ $L^\infty(B_1)$ との積を取る操作についても閉じていない）ので, その点で $L\log L(B_1)$ と状況が異なっている. 一連の先行研究ではいずれも「外力項の属する関数空間が絶対値を取る演算について閉じている」という性質を用いて弱解の正則性の証明を行なっている. それゆえ外力項が局所 Hardy 空間に属す場合は先行研究の手法を適用する事ができない. そこで私は別の方針を立てて問題点を回避し, 次の結果を得た.

主結果 3.1. B_1 を $\mathbb{R}^2$ の単位円盤, $m \geq 2$, $\Omega \in L^2\left(B_1; \mathfrak{so}(m) \otimes \wedge^1\mathbb{R}^2\right)$, $f \in h^1(B_1; \mathbb{R}^m)$ とする. このとき

$$-\Delta u = \Omega.\nabla u + f \quad \text{in } B_1$$

の弱解 $u \in W^{1,2}(B_1; \mathbb{R}^m)$ は $W^{2,1}(B_1; \mathbb{R}^m)$ に属す. さらにある $C = C(m) > 0$ が存在して,

$$||\nabla^2 u||_{L^1(B_1)} \leq C\left\{||\nabla u||_{L^2(B_1)} + ||f||_{h^1(B_1)}\right\}$$

と評価できる.

参考文献

[1] D. -C. Chang, The dual of Hardy spaces on a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. Forum Math. 6 (1994), no. 1, 65–81.

[2] Q. Chen, J. Jost, G. Wang and M. Zhu, The boundary value problem for Dirac-harmonic maps. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 15 (2013), no. 3, 997–1031.

[3] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 224. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[4] P. Laurain and T. Rivière, Angular energy quantization for linear elliptic systems with antisymmetric potentials and applications. Anal. PDE 7 (2014), no. 1, 1–41.

[5] P. L. Lions, Jacobians and Hardy spaces. International Symposium in honor of Renato Caccioppoli (Naples, 1989). Ricerche Mat. 40 (1991), suppl., 255–260.

[6] M. M. Rao and Z. D. Ren, Theory of Orlicz spaces. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 146. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[7] T. Rivière, Conservation laws for conformally invariant variational problems. Invent. Math. 168 (2007), no. 1, 1–22.

[8] T. Rivière and M. Struwe, Partial regularity for harmonic maps and related problems. Comm. Pure Appl. Math. 61 (2008), no. 4, 451–463.

[9] B. Sharp, Compensation phenomena in geometric partial differential equations. http://wrap.warwick.ac.uk/50026/. thesis, University of Warwick, (2012).

[10] B. Sharp, Higher integrability for solutions to a system of critical elliptic PDE. Methods Appl. Anal. 21 (2014), no. 2, 221–240.

[11] B. Sharp and P. Topping, Decay estimates for Riviere's equation, with applications to regularity and compactness. Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), no. 5, 2317–2339.