q-PAINLEVÉ EQUATION OF TYPE $E_6^{(1)}$ ARISING FROM PADÉ APPROXIMATION

長尾秀人 HIDEHITO NAGAO (明石工業高等専門学校)

Abstract. Padé 近似と呼ばれる有理関数による近似を応用して，2 階線形微分方程式を構成すると，超幾何微分方程式になることが古くから知られている．さらに，その非線形化として，Painlevé 方程式と呼ばれる 2 階非線形微分方程式を構成できることが知られている．最近になって，その q 差分的離散化として，$E_6^{(1)}$ 型 affine Weyl 群対称性を持つ q 差分的離散 Painlevé 方程式を構成することができた．本講演では，この結果について報告する．

1. Introduction

1.1. The background of (differential) Painlevé equations.

19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて, Paul Pailvevé によって発見され,「動く特異点は極に限る」という Pailvevé 性を備えた 2 階非線形常微分方程式として研究されてきた.「動く特異点」とは, 微分方程式の初期値問題の解に現れる特異点の位置が初期値に依存する特異点をいう. Pailvevé 程式は $P_{\rm I}$ から $P_{\rm VI}$ までの 6 種類に分類される.

$$
\begin{aligned}
&P_{\rm I} : \lambda'' = 6\lambda^2 + t,\\
&P_{\rm II} : \lambda'' = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha,\\
&P_{\rm III} : \lambda'' = \frac{1}{\lambda}(\lambda')^2 - \frac{1}{t}\lambda' + \frac{1}{t}(\alpha\lambda^2 + \beta) + \gamma\lambda^3 + \frac{\delta}{\lambda},\\
&P_{\rm IV} : \lambda'' = \frac{1}{2\lambda}(\lambda')^2 + \frac{3}{2}\lambda^3 + 4t\lambda^2 + 2(t^2 - \alpha)\lambda + \frac{\beta}{\lambda},\\
&P_{\rm V} : \lambda'' = \Big(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1}\Big)(\lambda')^2 - \frac{1}{t}\lambda' + \frac{(\lambda-1)^2}{t^2}\Big(\alpha\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\Big) + \frac{\gamma}{t}\lambda + \delta\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1},\\
&P_{\rm VI} : \lambda'' = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\Big)(\lambda')^2 - \Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t}\Big)\lambda'\\
&\qquad\qquad + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\Big(\alpha + \beta\frac{t}{\lambda^2} + \gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\Big).
\end{aligned}
$$

ここで, $\alpha, \beta, \cdots$ は複素数パラメーターである.

これら 6 種類の Pailvevé 方程式に関する退化図式を次のようになる.

$$
\begin{array}{ccccccc}
P_{\rm VI} & \to & P_{\rm V} & \to & P_{\rm III} & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & P_{\rm IV} & \to & P_{\rm II} \to P_{\rm I}.
\end{array}
$$

これら 6 種類の Pailvevé 方程式は一般的に初等関数の範囲では解くことができないが, パラメータが特殊な値をとる時に超幾何型の特殊関数で表される解が存在する. 他にも代数関数，有理関数で表される解などを持つ.

Painlevé 方程式は，ハミルトン力学系として表現でき，線形作用素 (ラックス・ペア）の両立条件として表現でき， Bäcklund 変換として affine Weyl 群対称性を持つなど，可積分系としての多くの良い性質を持つ.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 33D15, 34M55, 39A13, 41A21.
Key words and phrases. Padé method, Padé interpolation, q-Painlevé equation.

Remark 1. ラックス・ペアとは，可積分系の理論における用語であり，2 種類の線形方程式（線形方程式とその変形方程式）の両立条件として，時間発展型非線形方程式が得られる組である．

1.2. The background of discrete Painlevé equations.

離散 Painlevé 方程式は，微分 Painlevé 方程式の良い性質を保存したまま離散化したものである．例えば，離散 Painlevé 性 (特異点閉じ込め)，特殊解，Bäcklund 変換，ラックス・ペアなど．それらは拡大 affine Weyl 群対称性に関連した有理曲面に基づいて分類され [9]，差分タイプは楕円差分 (e-), 乗法差分 (q-)，加法差分 (d-) の 3 種類がある．q 差分 Painlevé 方程式は Bäcklund 変換としての affine Weyl 群対称性により，$E_8^{(1)}$ 型から $\mathcal{D}_6$ 型まで分類され，退化図式は次のようになる．

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & \nearrow & \mathbb{Z} & \searrow & \\
E_8^{(1)} & \to & E_7^{(1)} & \to & E_6^{(1)} & \to & D_5^{(1)} & \to & A_4^{(1)} & \to & (A_2+A_1)^{(1)} & \to & (A_1+A_1')^{(1)} & \to & A_1^{(1)} \quad \mathcal{D}_6 \\
 & & & & & & (q\text{-}P_{\mathrm{VI}}) & & (q\text{-}P_{\mathrm{V}}) & & (q\text{-}P_{\mathrm{IV}}, q\text{-}P_{\mathrm{III}}) & & (q\text{-}P_{\mathrm{II}}) & & (q\text{-}P_{\mathrm{I}})
\end{array}
$$

1.3. The background of Padé method.

Padé 近似を応用して Painlevé および Garnier 方程式を研究する簡単な方法 [12] がある．その方法では，適当な Padé 近似の問題を設定すれば，Painlevé(Garnier) 方程式に対する時間発展方程式，ラックス・ペア，超幾何型特殊解の 3 つが同時に得られる．この方法は Padé 法と呼ばれている．Padé 法はこれまで様々な離散 Painlevé 方程式 [5] に適用されている [3, 6, 7, 8, 14]．本報告は [7] に基づく．

2. Padé approximation method to case q-$E_6^{(1)}$

本章では，Padé 近似を応用して，q 差分 Painlevé 方程式 $E_6^{(1)}$ 型の時間発展方程式，ラックス・ペア，超幾何型特殊解を導く．

2.1. Padé approximation problem. パラメーター $q, a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき，適当な関数

$$Y(x) := \frac{(a_1x, a_2x, a_3x)_\infty}{(b_1x, b_2x, b_3x; q)_\infty}, \quad \frac{a_1a_2a_3q^m}{b_1b_2b_3q^n} = 1. \tag{2.1}$$

を与え，Padé 近似の問題

$$Y(x) \equiv \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad (\mathrm{mod}\ x^{m+n+1}). \tag{2.2}$$

を考える．ここで，関数 $P_m(x)$，$Q_n(x)$ はそれぞれ m，n 次多項式とし，q ポッホハンマーは

$$(a_1, a_2, \cdots, a_i)_j := \prod_{k=0}^{j-1}(1 - a_1q^k)(1 - a_2q^k)\cdots(1 - a_iq^k). \tag{2.3}$$

とする．

2.2. **Time evolution.**
パラメーター a_i, b_i, m, n をシフトさせる作用素 T を

$$T : (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m, n) \to (qa_1, a_2, a_3, qb_1, b_2, b_3, m, n). \tag{2.4}$$

をする．また，この作用素 T は q 差分 Painlevé 方程式の時間発展の方向を決定するので，時間発展と呼ぶ.

未知関数 $y(x)$ に対して，$y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を解に持つ，3 項間 $y(x), y(qx), \overline{y}(x)$ 線形 q 差分方程式を $L_2(x)$ とし，3 項間 $y(x), \overline{y}(x), \overline{y}(x/q)$ 線形 q 差分方程式を $L_3(x)$ とする．このとき,

Lemma 1. 線形 q 差分方程式 L_2, L_3 は次のように表示される.

$$\begin{aligned} L_2(x) : (1 - xf)\overline{y}(x) &- (1 - a_2x)(1 - a_3x)y(qx) \\ &+ \frac{a_2a_3q^m g}{b_1}(1 - b_1x)(1 - x/g)y(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} L_3(x) : w(1 - x\overline{f}/q)y(x) &+ \frac{a_2a_3q^m g}{b_1}(1 - a_1x)(1 - x/qg)\overline{y}(x) \\ &- q^{m+n+1}(1 - b_2x/q)(1 - b_3x/q)\overline{y}(x/q) = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで，$f, g, \overline{f}, w$ は x に依らない変数であり，記号 $\overline{F} := T(F)$, $\underline{F} := T^{-1}(F)$ とする.

Proof. L_2, L_3 の定義より，次の x の恒等式が成り立つ.

$$L_2(x) : \begin{vmatrix} y(x) & y(qx) & \overline{y}(x) \\ P_m(x) & P_m(qx) & \overline{P}_m(x) \\ Y(x)Q_n(x) & Y(qx)Q_n(qx) & \overline{Y}(x)\overline{Q}_n(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{2.7}$$

$$L_3(x) : \begin{vmatrix} y(x) & \overline{y}(x) & \overline{y}(x/q) \\ P_m(x) & \overline{P}_m(x) & \overline{P}_m(x/q) \\ Y(x)Q_n(x) & \overline{Y}(x)\overline{Q}_n(x) & \overline{Y}(x/q)\overline{Q}_n(x/q) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.8}$$

カソラチ行列式を計算すれば，q 差分方程式 L_2 (2.5), L_3 (2.6) が得られる．□

以下では，L_2, L_3 (2.5), (2.6) に基づいて，q 差分 Painlevé 方程式 $E_6^{(1)}$ 型に対する時間発展方程式，ラックス・ペア，超幾何型特殊解が導出される.

2.3. **The q-Painlevé equation.**

Proposition 1. *2 変数 f, g の連立 1 階非線形 q 差分方程式 (1 変数の 2 階非線形 q 差分方程式)*

$$(fg - 1)(f\underline{g} - 1) = \frac{b_1^2}{a_2^2a_3^2q^{m-n}} \frac{(f - a_2)(f - a_3)(f - b_2)(f - b_3)}{(f - a_1)(f - b_1)}, \tag{2.9}$$

$$(fg - 1)(\overline{f}g - 1) = qa_1b_1 \frac{(g - 1/a_2)(g - 1/a_3)(g - 1/b_2)(g - 1/b_3)}{(g - b_1/a_2a_3q^m)(g - b_1q^{n+1}/a_2a_3)}. \tag{2.10}$$

得られる．これは q 差分 Painlevé 方程式 $E_6^{(1)}$ 型の時間発展方程式 [5] である.

Proof. q 差分線形方程式 L_2, L_3 (2.5), (2.6) の両立条件として，変数 w を含まない 2 変数 f, g の方程式 (2.9), (2.10) が得られる．□

2.4. **The Lax pair.**

未知関数 $y(x)$ に対して，$y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$ を解に持つ 3 項間 $y(qx), y(x), y(x/q)$ の線形 q 差分方程式を $L_1(x)$ とする．このとき，

Proposition 2. 線形 q 差分方程式 L_1 は次のように表示される．

(2.11)

$$\begin{aligned} L_1(x): &\frac{(q-b_1x)(q-b_2x)(q-b_3x)q^{m+n-1}}{q-fx}\Big[y(x/q) - \frac{a_1(q-a_2x)(q-a_3x)}{b_2b_3q^n(q-b_1x)(gq-x)}y(x)\Big] \\ &+ \frac{(1-a_1x)(1-a_2x)(1-a_3x)}{1-fx}\Big[y(qx) - \frac{b_2b_3q^n(1-b_1x)(g-x)}{a_1(1-a_2x)(1-a_3x)}y(x)\Big] \\ &+ \frac{a_1q^{m+1}}{b_2b_3g}\Big[\left(1-\frac{b_2b_3g}{a_1q^{m+1}}\right)\left(1-\frac{b_2b_3gq^n}{a_1}\right) + \frac{x(1-a_2g)(1-a_3g)(1-b_2g)(1-b_3g)}{(1-fg)(gq-x)}\Big]y(x) = 0, \end{aligned}$$

２つの線形 q 差分方程式 L_1, L_2 *(2.11), (2.5)* はラックス・ペアであり，*2* $\times$ *2* 行列型ラックス形式 [10] およびスカラー型ラックス・ペア [3, 13] と等価である．

Proof. q 差分方程式 $L_2(x), L_2(x/q), L_3(x)$ (2.5), (2.6) から 2 項 $\overline{y}(x), \overline{y}(x/q)$ を消去すれば，q 差分方程式 L_1 (2.11) が得られる．□

2.5. **Special solutions.**

Lemma 2 (Schur 関数による公式 [12])**.** 与えられた関数 $Y(x)$ に対して，$x = 0$ のまわりで *Taylor* 展開

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad p_0 = 1, \quad p_i = 0 \quad (i < 0), \tag{2.12}$$

を考える．このとき，*Padé* 近似問題 *(2.2)* を満たす m, n 次多項式 $P_m(x), Q_n(x)$ は行列式

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} s_{(m^n,i)} x^i, \quad Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} s_{((m+1)^i, m^{n-i})}(-x)^i, \tag{2.13}$$

で表示される．ここで，s_λ は *Jacobi-Trudi* 公式 $s_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)} = \det(p_{\lambda_i-i+j})_{i,j=1}^{l}$ で定義される *Schur* 関数である．

Corollary 1 (Schur 関数による公式 2 [12])**.** 多項式 $P_m(x)$，$Q_n(x)$ *(2.13)* は，*1* つの行列式に次のように表示される．

$$P_m(x) = x^m s_{(m^{n+1})}\big|_{p_i \to \sum_{j=0}^{i} x^{-j} p_{i-j}}, \quad Q_n(x) = (-x)^n s_{((m+1)^n)}\big|_{p_i \to p_i - x^{-1} p_{i-1}}. \tag{2.14}$$

Proposition 3. q 差分 *Painlevé* 方程式 $E_6^{(1)}$ 型の時間発展方程式 *(2.9), (2.10)* の超幾何型特殊解 f, g として，次のものが得られる．

$$\begin{aligned} \frac{1-f/a_1}{1-f/a_2} &= \frac{a_1\prod_{i=1}^{3}(1-b_i/a_1)}{a_2\prod_{i=1}^{3}(1-b_i/a_2)} \frac{T_{a_1}(\tau_{m,n+1})T_{a_1}^{-1}(\tau_{m+1,n})}{T_{a_2}(\tau_{m,n+1})T_{a_2}^{-1}(\tau_{m+1,n})}, \\ \frac{1-1/b_2g}{1-1/b_3g} &= \frac{b_2\prod_{i=2}^{3}(1-a_i/b_2)}{b_3\prod_{i=2}^{3}(1-a_i/b_3)} \frac{T_{b_2}^{-1}(\tau_{m,n+1})T_{b_2}(\overline{\tau}_{m+1,n})}{T_{b_3}^{-1}(\tau_{m,n+1})T_{b_3}(\overline{\tau}_{m+1,n})}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

ここで，行列式 $\tau_{m,n} = s_{(m^n)}$ の要素 p_k は次で与えられる．

$$p_k = \frac{b_3^k \left(\frac{a_3}{b_3}\right)_k}{(q)_k} \sum_{k_i \geq 0}^{k} \frac{\left(q^{-k}\right)_{k_1+k_2} \left(\frac{a_1}{b_1}\right)_{k_1} \left(\frac{a_2}{b_2}\right)_{k_2}}{\left(\frac{q^{-k+1}b_3}{a_3}\right)_{k_1+k_2} (q)_{k_1} (q)_{k_2}} \left(\frac{b_1}{a_3}q\right)^{k_1} \left(\frac{b_2}{a_3}q\right)^{k_2}. \tag{2.16}$$

ここで，パラメーター a_i, b_i に依るすべての量である F に対して，$T_{a_i}(F) = F|_{a_i \to q a_i}$, $T_{a_i}^{-1}(F) = F|_{a_i \to a_i/q}$ とする．この特殊解は [3] と等価である．

Proof. q 差分線形方程式 L_2, L_3 (2.7), (2.8) の y のカソラチ行列式において，$P_m(x), Q_n(x)$ によって定義される f, g の値は，Schur 関数による公式 2 (2.14) を用いれば得られる．□

Remark 2. 一般の *(2.1)(2.16)* に関して [11] で述べらている．

$$\prod_{i=1}^{N+1} \frac{(a_i x)_\infty}{(b_i x)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{N+1} \frac{b_s^k - a_s^k}{k(1-q^k)} x^k \Big). \tag{2.17}$$

Remark 3. 要素 p_k は *2* 変数 *q-Appel Lauricella* 級数の有限和であるが，変換 $b_3 = q^{k-1} a_1 a_2$, $a_3 = b_1 b_2$ の下で，*big q-Jacobi* 多項式と呼ばれる *q*-超幾何級数 ${}_3\varphi_2$ の有限和に書き換えられる．

Remark 4. [4] によれば，*Andrews* は変換公式 *q-Appell Lauricella* 関数 φ_D^l と *q*-超幾何関数 ${}_k\varphi_l$ の間の変換公式 *(*$l = 2$ の場合 [1] , 正の整数 l の場合 [2]*)* が導いた．

$${}_{l+1}\varphi_l \left(\begin{matrix} a, & b_1 \ldots, & b_l \\ & c_1, \ldots, & c_l \end{matrix}, u \right) = \frac{(au)_\infty}{(u)_\infty} \prod_{k=1}^{l} \frac{(b_k)_\infty}{(c_k)_\infty} \varphi_D^l(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_l, \gamma; z_1, \ldots, z_l) \tag{2.18}$$

$${}_k\varphi_l \left(\begin{matrix} \alpha_1, & \ldots, & \alpha_k \\ \beta_1, & \ldots, & \beta_l \end{matrix}, x \right) := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)_s}{(\beta_1, \ldots, \beta_l, q)_s} \left[(-1)^s q^{\binom{s}{2}} \right]^{1+l-k} x^s, \tag{2.19}$$

ここで $\binom{s}{2} := s(s-1)/2$.

$$\varphi_D^l(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_l, \gamma; z_1, \ldots, z_l) := \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\alpha)_{|m|} (\beta_1)_{m_1} \ldots (\beta_l)_{m_l}}{(\gamma)_{|m|} (q)_{m_1} \ldots (q)_{m_l}} z_1^{m_1} \ldots z_l^{m_l}, \tag{2.20}$$

ここで $|m| := m_1 + \ldots + m_l$.

この変換公式の有限の場合が 3 に相当する．

2.6. Main theorem.

Theorem 2.1. 適当な *Padé* 近似問題 *(2.1), (2.2)* の設定により，*q* 差分 *Painlevé* 方程式 $E_6^{(1)}$ 型に対する時間発展方程式 *(Proposition 1),* ラックス・ペア *(Proposition 2),* 超幾何型特殊解 *(Proposition 3)* が *3* つ同時に得られる．

Acknowledgment

本研究を行う上で，山田泰彦氏の限りない議論と価値ある助言に感謝する．

References

[1] Andrews G.E., *Summation and transformation for basic Appell series*, J. London Math. Soc. **4** (2) (1972), 618–622.

[2] Andrews G.E., *Problems and prospectives for basic hypergeometric functions, in: Theory and application of special functions*, Proc. Advanced Sem. Math. Res. Center, University of Wisconsin, Madison, WI, (1975), 19–224.

[3] Ikawa Y., *Hypergeometric Solutions for the q-Painlevé Equation of Type $E_6^{(1)}$ by the Padé method*, Lett. Math. Phys., Volume **103**, Issue 7 (2013), 743–763.

[4] Kajihara Y., *Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications*, Advances in Mathematics **187** Issue 1 (2004), 53–97.

[5] Kajiwara K., Noumi M., and Yamada Y., *Geometric aspects of Painlevé equations*, arXiv 1509.08186 [nlin.SI].

[6] Nagao, Hidehito *The Padé interpolation method applied to q-Painlevé equations*. Lett. Math. Phys. **105** (2015), no. 4, 503–521.

[7] Nagao, H., *The Padé interpolation method applied to q-Painlevé equations II (differential grid version)*, arXiv:1509.05892 [math.CA].

[8] Noumi M., Tsujimoto S., Yamada Y., *Padé interpolation for elliptic Painlevé equation*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., Volume **40** (2013), 463–482.

[9] Sakai H., *Rational surfaces with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Commun. Math. Phys., **220** (2001), 165–221.

[10] Sakai H., *Lax form of the q-Painlevé equation associated with the $A_2^{(1)}$ surface*, J. Phys. A: Math. Gen., **39** (2006), 12203-12210.

[11] Tsuda T., *On an integrable system of q-difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to q-Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **293** (2010), 347–359.

[12] Yamada Y., *Padé method to Painlevé equations*, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 83–92.

[13] Yamada Y., *Lax formalism for q-Painlevé equations with affine Weyl group symmetry of type $E_n^{(1)}$*, IMRN, **17** (2011), 3823–3838.

[14] Yamada Y., *A simple expression for discrete Painlevé equations*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B**47** (2014), 087–095.

Department of Arts and Science, National Institute of Technology, Akashi College, Hyogo 674-8501, Japan
E-mail address: nagao@akashi.ac.jp