# ロジスティック成長する個体群に対して<br>空間非一様性が与える影響

永原 健大郎 （Kentaro Nagahara）

東京工業大学大学院 理工学研究科 数学専攻

e-mail: nagahara.k.ac@m.titech.ac.jp

## 1 Introduction

環境資源の配置が，ある種の生物の個体数にどのように影響するかという問題は，保全生物学において重要な問題として残されている [3]．本講演では，総資源量が一定という制約条件の下で，生物の個体数が最大となる資源配置は具体的にどのような形で与えられるのか，という問題について論ずることを目的とする．

始めに，本研究の背景に触れるため，Verhulst [6] が提唱した次の方程式を見てみよう．

$$\frac{d}{dt}w(t) = w(t)\{k - w(t)\}$$

これはロジスティック方程式と呼ばれる生物の増殖を表す数理モデルで，人口の無制限な成長は不可能で，増加率はやがて鈍化し，最終的には定常的になるという考え方を反映させている．ここで，$t \in \mathbb{R}_+$ は時間，$w(t) \in \mathbb{R}$ は生物種の個体数，$k \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ は内的自然増加率と呼ばれる定数で，その生物が潜在的に持っている最大の繁殖増加率を表している．
初期値が $w(0) > 0$ を満たしているとする．この方程式は変数分離系であり具体的に解くことができ，

$$w(t) = \frac{k}{1 + \left(\dfrac{k}{w(0)} - 1\right)e^{-kt}} \quad \text{if} \quad (0 < k \leq 1),$$

$$w(t) = \frac{1}{t + \dfrac{1}{w(0)}} \quad \text{if} \quad (k = 0)$$

と表される．$0 < k \leq 1$ のとき，解は $w(t) \to k$ $(t \to \infty)$ となり，個体数は $k$ まで増殖するが，$k = 0$ のとき，解は $w(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ となり，生物群は絶滅してしまう．($k$ は一般に $k \in \mathbb{R}$ としても同様の議論ができるが，今回は簡単のために $0 \leq k \leq 1$ として扱った．)

次に，生物が生息域である有界領域内をランダムに移動することを考慮に入れる．ただし，この生息域は環境が一様ではなく，内的自然増加率が空

間変数 $x$ に依存する関数 $k=m(x)$ によって表されるものとする．言い換えれば，$m(x)$ は場所 $x$ に生物が増殖するのに適した資源がどの程度置かれているかを表しており，この関数 $m(x)$ を環境容量と呼ぶ．この $m(x)$ は非負値 Lebesgue 可測関数であり，次の条件を満たすものとする．

(M1)　$0 \leq m(x) \leq 1 \quad \mathcal{L}\text{-a.e.}$

(M2)　$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega m(x)dx = \delta.$

ここで，$m(x)$ が 0 に近い場所は生物にとって住みにくい環境であり，$m(x)$ が 1 に近いところは生物が住みやすい環境であることを表している．また，$\delta$ は総資源量を表す定数で，$0<\delta<1$ を満たす．すなわち，$m \equiv 0$ in $\Omega$ という資源が全くない状況，または $m \equiv 1$ in $\Omega$ という資源がすべての領域で豊富にある状況は考えないものとする．以降この $\delta$ を固定した状況を考える．

以上の状況の下，場所 $x$，時刻 $t$ における生物種の個体密度分布 $v_{m,\varepsilon}(x,t)$ は，次の空間非一様性のある反応拡散ロジスティック方程式 (あるいは Fisher-KPP 方程式) と呼ばれる数理モデルを用いて表される [5]．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_{m,\varepsilon}}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta v_{m,\varepsilon} + m(x) v_{m,\varepsilon} - v_{m,\varepsilon}^2 & ((x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}_+), \\ \dfrac{\partial v_{m,\varepsilon}}{\partial n} = 0 & ((x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+), \\ v_{m,\varepsilon}(x,0)\geq 0, \quad v_{m,\varepsilon}(x,0)\not\equiv 0 & \big(x\in\overline{\Omega}\big), \end{cases} \tag{1}$$

$$m \in X := \left\{ m\in L^\infty(\Omega) \,\middle|\, 0\leq m(x)\leq 1, \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega m(x)dx=\delta \right\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は生物の生息域に対応し，滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ．(1) の第 2 式にある Neumann 境界条件は，生物が $\partial\Omega$ を超えて生息域 $\Omega$ の外に出ないことを意味する．$n$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである．また，$\varepsilon>0$ は正の定数で，拡散係数と呼ばれる生息域内を生物が移動する速さを表すパラメータである．$\varepsilon$ が大きければ，生息域内を生物が速いスピードで移動し，$\varepsilon$ が小さければ生物は遅いスピードで移動することに対応している．初期条件 $v_{m,\varepsilon}(x,0)\in C(\overline{\Omega})$ は観測を開始した時点での生物の生息域内での分布を表す．また，$X\subset L^\infty(\Omega)$ は，条件 (M1),(M2) を満たしている関数 $m(x)$ 全体を表している．なお，$m(x)$ が定数ならば，冒頭で紹介したロジスティック方程式と同様の計算ができる．

ここで，(1) の数理モデルで記述される生物個体群が絶滅 ($||v_{m,\varepsilon}(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)}\to 0 \ \ (t\to\infty)$) せず増殖できるかどうかが問題となるが，これに対しては，Cantrell-Cosner([1],[2]) による結果が知られている．彼らの一連の研究結果により，$m\in X$ のとき，(1) には非自明な正値定常解 $u_{m,\varepsilon}\in W^{2,p}(\Omega)\cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ $({}^\forall p>1)$ が一意的に存在し，初期値 $v_{m,\varepsilon}(x,0)$ に依存せず $t\to\infty$ ですべての解が $u_{m,\varepsilon}(x)$ に一様収束することが示されている．

この結果を用いて，十分に時間 $t$ が経過した後の生物の個体数を調べるため，(1) の定常解が満たす半線形楕円型偏微分方程式を確認しておこう．

$$
\begin{cases}
-\varepsilon^2 \Delta u_{m,\varepsilon} = m(x) u_{m,\varepsilon} - u_{m,\varepsilon}^2 & (x \in \Omega), \\
\dfrac{\partial u_{m,\varepsilon}}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega)
\end{cases}
\tag{2}
$$

ここで，解 $u_{m,\varepsilon}(x)$ は環境容量 $m(x)$，拡散係数 $\varepsilon$ に依存することに注意しておく．

これを受け，W.Ding ら 5 名 [3] の研究によって Net-Benefit と呼ばれる次の量が導入された．

$$
J(m,\varepsilon) := \int_\Omega \left[ u_{m,\varepsilon}(x) - Bm(x)^2 \right] dx
$$

ただし $B$ は非負の定数とする．$J(m,\varepsilon)$ は，生息数 $\int_\Omega u_{m,\varepsilon}(x)dx$ から資源配置にかかるコスト $\int_\Omega Bm(x)^2 dx$ を引いた値を表している．すなわち，$J(m,\varepsilon)$ の値が大きい資源配置は，生物の生息数が多くなり，かつコストの少ない資源配置となっていると言える．

では，資源の総量 $\delta$ が一定の下で，$J(m,\varepsilon)$ が最も大きくなる資源配置 $m(x)$ とは具体的にどのような資源配置なのだろうか．これは，$J(m,\varepsilon)$ の大域的最大化解となる $m^*(x) \in U$ を具体的に求める問題となる．

問題に入る前に，大域的最大化解 (global maximizer) と局所的最大化解 (local maximizer) について述べる．環境容量 $m(x)$ の集合 $X$ 内の $J(m,\varepsilon)$ の上限

$$
J_{\sup} := \sup_{m \in X} J(m,\varepsilon)
$$

に対し，$J(m^*,\varepsilon) = J_{\sup}$ を満たす $m^* \in X$ のことを大域的最大化解という．ここで，拡散係数 $\varepsilon$ は生物種の生態によって決まる値であり，ここでは固定されている．また，$\tilde{m}(x) \in X$ に対し，ある $\mu > 0$ が存在し，

$$
\int_\Omega |m(x) - \tilde{m}(x)| dx < \mu
$$

を満たすすべての $m \in X$ に対して，

$$
J(m,\varepsilon) \le J(\tilde{m},\varepsilon)
$$

が成り立つとき，$\tilde{m}(x)$ を局所的最大化解という．ここで，大域的最大化解は局所的最大化解の条件も満たしていることに注意する．W.Ding ら [3] によっ

て，すべての $B \geq 0$，$\varepsilon > 0$ で大域的最大化解 $m^*(x) \in X$ が存在することが示されている．

具体的形状についても W.Ding ら [3] によって部分的に解答が得られており，$B \geq 0$ が十分大きい場合には，$m(x) \equiv \delta$ が $J(m,\varepsilon)$ の大域的最大化解であることが証明されている．しかし $B$ が小さいときは，$J(m,\varepsilon)$ の値が (1) の定常解の空間変数 $x$ に対する積分 $\int_\Omega u_{m,\varepsilon}(x)dx$ に大きく依存するため解析が難しく，具体的な形状はわかっておらず，研究の及んでいない部分が多い．

そこで Ding らは [3] において数値解析を行い，$B = 0$ のとき，すなわち $J(m,\varepsilon) = \int_\Omega u_{m,\varepsilon}(x)dx$ のとき，$J(m,\varepsilon)$ の大域的最大化解は bang-bang 性と呼ばれる性質を持つという予想を立てた．ここで，環境容量 $m(x)$ が bang-bang 性を持つとは，$m(x)$ が Legbesgue 可測集合 $E \subset \Omega$ 上で $m(x) = 1$ を満たし，$\Omega \setminus E \subset \Omega$ 上で $m(x) = 0$ を満たすことをいう．

本講演では，$B = 0$，$\varepsilon$ を固定したとき，環境容量 $m(x)$ を摂動させ，$m(x)$ が $J(m)$ の停留点となる条件を調べた結果を報告し，そこから明らかになった $J(m)$ の大域的最大化解が持つ条件について述べる．次に，$\Omega = (0,1)$ とし，これまでとは逆に環境容量 $m(x)$ を固定し，$\varepsilon$ を動かすことを考える．考える環境容量 $m(x)$ が bang-bang 性を持つ場合に，特異極限問題の解と比較することにより $\int_\Omega u(x)dx$ の拡散係数 $\varepsilon = 0$ での漸近展開が得られたことを説明し，これらを用いた発展的な議論を加えて発表したいと思う．

# 2　大域的最大化解の性質

**定理 2.1.** $m^*(x) \in X$ を大域的最大化解とする．このとき，

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} m^*(x) = 1,$$
$$or$$
$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} m^*(x) = 0.$$

が成り立つ．

**証明.** 概略を説明する．まず，$X_0 \subset X$ を次のように定義する．

$$X_0 := \left\{ m \in L^\infty(\Omega) \middle| 0 < m(x) < 1, \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega m(x)dx = \delta \right\}.$$

${}^\forall m_0(x) \in X_0$ に対し，$\mu > 0$，$g \in L^\infty(\Omega)$; $\int_\Omega g dx = 0$ を，$m := m_0 + \mu g \in X_0$ となるようにとる．この $m$ に対して定まる (2) の解 $u(x)$ は，

$$\int_\Omega u(x)dx = \int_\Omega u_0(x)dx + \mu \int_\Omega u_1(x)dx + o(\mu)$$

の形に漸近展開することができる．ここで，$u_0(x)$ 及び $u_1(x)$ は，それぞれ次の方程式の解である．

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_0 = m(x)u_0 - u_0^2 & (x \in \Omega), \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_1 = (m(x) - 2u_0)u_1 + gu_0 & (x \in \Omega), \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \tag{4}$$

ここで，第一変分 $\int_\Omega u_1(x)dx$ に注目すると，

$$\int_\Omega u_1(x)dx = 0 \Leftrightarrow m_0 \equiv \delta$$

を示すことができる．更に，$m_0 \equiv \delta$ は $\int_\Omega udx$ の大域的最小化解であることも示され，したがって定理の結論が導かれる． □

# 3 $J(m,\varepsilon)$ の $\varepsilon$ に対する漸近展開

方程式 (2) から，次の結果が導かれる．

$$\varepsilon^2 \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^2} dx = \int_\Omega mdx - \int_\Omega udx.$$

定理 2.1 よりも詳しい大域的最大化解 $m^*(x)$ の形状を調べるためには，この左辺が最大となるような $m^* \in X$ を探すことが重要となるが，その解析は容易ではない．しかし，$m$ が $C^1$ 級と仮定した場合，

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \int_\Omega |\nabla m|^2 dx$$

となることが知られている [4]．したがって $m(x)$ の勾配の平均と $u(x)$ の勾配の平均は重要な関係を持っていることが伺える．そこで，Ding ら [3] の予想をもとに，環境容量 $m(x)$ が不連続ではあるが最も変化が激しい bang-bang 性を持つときの $J(m,\varepsilon)$ について詳しく調べようと考えた．以降，次の状況を考える．

$\Omega = (0,a)$ とし，環境容量 $m_1(x)$ を次のように定義する．

$$m_1(x) = \begin{cases} 0 & (x \in (0,x_0)), \\ 1 & (x \in (x_0,a)), \end{cases}$$

この時，$J(m_1,\varepsilon)$ の $\varepsilon$ に関する漸近展開を調べた結果，次の式を得た．

**定理 3.1.**

$$J(m_1,\varepsilon)=\delta+C_1\varepsilon+C_2K^6(\sin\frac{\pi}{12})\frac{1}{x_0^6}\varepsilon^7+o(\varepsilon^7), \tag{5}$$

$$C_1:=\sqrt{2\sqrt{3}}-\left(3-\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right),$$
$$C_2:=12\sqrt{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3\sqrt{3}}+\sqrt{3}-\left(\sqrt[4]{3}+\frac{9}{5}\right)\right)$$

ここで，$\delta$ は $m_1(x)$ の定義から $\delta=a-x_0$ である．

**証明.** 概略を説明する．$m_1(x)$ の定義から，方程式 (2) の解 $u$ は次を満たす．

$$-\varepsilon^2 u_{xx}=-u^2,\quad 0<x<x_0,\quad u_x(0)=0,$$

$$-\varepsilon^2 u_{xx}=u-u^2,\quad x_0<x<a,\quad u_x(a)=0.$$

また，原点で $C^1$ 級に接続する条件により，

$$u(x_0+)=u(x_0-),\quad u_x(x_0+)=u_x(x_0-),$$

となる．ここで，変数変換と原点で接続する条件により，方程式を $(0,x_0)$，$(x_0,a)$ で分けて考えると，方程式 (2) の解 $u$ を解くことは次の連立微分方程式を解くことに帰着される．

$$\begin{cases}-u^A_{xx}=-(u^A)^2,\quad x\in\left(-\dfrac{x_0}{\varepsilon},0\right),\\ u^A_x\left(-\dfrac{x_0}{\varepsilon}\right)=0,\quad u^A_x(0)=\sqrt{\dfrac{2}{3}(\gamma^3-\alpha^3)},\\ u^A\left(-\dfrac{x_0}{\varepsilon}\right)=\alpha,\quad u^A(0)=\gamma,\quad u^A_x(x)\geq 0.\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases}-u^B_{xx}=(u^B)-(u^B)^2,\quad x\in\left(0,\dfrac{1-x_0}{\varepsilon}\right),\\ u^B_x\left(\dfrac{1-x_0}{\varepsilon}\right)=0,\quad u^B_x(0)=\sqrt{\dfrac{2}{3}(\gamma^3-\alpha^3)},\\ u^B\left(\dfrac{1-x_0}{\varepsilon}\right)=\beta,\quad u^B(0)=\gamma,\quad u^B_x(x)\geq 0..\end{cases} \tag{7}$$

ここで，$u^A(x)$ は $(0,x_0)$ 上での解 $u(x)$，$u^B(x)$ は $(x_0,a)$ 上での解 $u(x)$ を表す．さらに，$\alpha:=u(0)$，$\beta:=u(a)$，$\gamma:=u(x_0+)=u(x_0-)$ と約束する．

方程式から，$(0,a)$ 上で $u_x > 0$ が示される．さらに，(6)，(7) の第 1 式の両辺にそれぞれ $u_x^A$，$u_x^B$ を掛けて両辺を積分すると，次の保存量が得られる．

$$\frac{du^A}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3}\left((u^A)^3 - \alpha^3\right)} \qquad \left(x \in \left[-\frac{x_0}{\varepsilon}, 0\right]\right), \tag{8}$$

$$\frac{du^B}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3}\left((u^B)^3 - \frac{3}{2}(u^B)^2 - \beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2\right)} \qquad \left(x \in \left[0, \frac{1-x_0}{\varepsilon}\right]\right) \tag{9}$$

また，Liang-Lou[4] の結果から，

$$\alpha \to 0 \quad (\varepsilon \to 0), \tag{10}$$

$$\beta \to 1 \quad (\varepsilon \to 0) \tag{11}$$

が従う．したがって，$\varepsilon \to 0$ としたとき，保存量は

$$\frac{d\overline{u}^A}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3}\left((\overline{u}^A)^3\right)} \qquad (x \in (-\infty, 0]), \tag{12}$$

$$\frac{d\overline{u}^B}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3}\left((\overline{u}^B)^3 - \frac{3}{2}(\overline{u}^B)^2 + \frac{1}{2}\right)} \qquad (x \in [0, \infty)) \tag{13}$$

となる．この保存量から得られる解 $\overline{u}^A, \overline{u}^B$ が極限問題の解に相当し，具体的に解くことができる．

次に，極限問題の解と拡散係数 $\varepsilon$ がとても小さいときの解とを比較することにより，$J(m_1, \varepsilon)$ の漸近展開を得ることを考える．保存量 (8)，(9) を用いて，次に述べる関係式を得ることができる．

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{\sqrt{3}}}\frac{x_0}{\varepsilon} = 2K(\sin\frac{\pi}{12}) - \mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{\gamma}{\alpha} - (1+\sqrt{3})}{\frac{\gamma}{\alpha} - 1 + \sqrt{3}}\right)^2}, \sin\frac{\pi}{12}\right) \tag{14}$$

$$\tanh\left(\frac{1-x_0}{2\varepsilon}\right) < 1 - \frac{1}{4}(1-\beta) < 1 \tag{15}$$

ここで，

$$K(k) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}d\xi \quad (0 \le k < 1)$$

は，第一種完全楕円積分と呼ばれる母数 $k$ に関する関数であり，$k \to 1$ のとき，$K(k) \to \infty$ となる．また，

$$\mathrm{sn}^{-1}(y,k) := \int_0^y \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}d\xi \quad (-1 \le y \le 1)$$

は，Jacobi の楕円関数のうち，sn 関数と呼ばれる関数の逆関数である．
この (14)，(15)，および $\alpha$，$\beta$ の 0 次オーダー (10)，(11) から，次のように $\alpha$ の漸近展開，及び $\beta$ の評価を出すことができる．

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{x_0^2} K^2 (\sin \frac{\pi}{12}) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \tag{16}$$

$$1 - 16 \frac{e^{-\frac{1-x_0}{\varepsilon}}}{1 + e^{-\frac{1-x_0}{\varepsilon}}} < \beta < 1. \tag{17}$$

この評価を用いて，スケール変換後の方程式の解の積分との間に，

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 u(x) dx = \int_{-x_0/\varepsilon}^0 u^A(x) dx + \int_0^{(1-x_0)/\varepsilon} u^B(x) dx =: I_A + I_B \tag{18}$$

が成り立つことに注目し，$I_A$，$I_B$ について計算する．
これらの積分を具体的に行うのは通常困難であるが，例えば $I_A$ について，変数変換

$$\frac{d}{dx} u^A(x) = \frac{d}{dy} \overline{u}^A(y)$$

を施すと，非積分関数が極限方程式の解で，積分区間に $\varepsilon$ の影響が現れるようにできる．従って保存量 (12)，$\overline{u}^A(y)$ の具体表示，及び $\alpha$ の漸近展開 (16) も合わせて考慮すると，

$$I_A = \sqrt{6}\varepsilon \int_{\varepsilon(\gamma^3-\alpha^3)^{-1/6}}^{\infty} \frac{1}{t^2} \left( 1 + \left( \frac{24\sqrt{3}}{x_0^6} K^6 (\sin \frac{\pi}{12}) + o(1) \right) t^6 \right)^{-1/3} dt \quad (\varepsilon \to 0)$$

と書くことができる．ここから $\beta$ の評価 (17) を使いつつ，更に計算を進めることにより，

$$I_A = \sqrt{2\sqrt{3}} - C_{A,6} \frac{1}{x_0^6} \varepsilon^6 + o(\varepsilon^6) \quad (\varepsilon \to 0), \tag{19}$$

$$C_{A,6} := 12 \sqrt{2\sqrt{3}} \left( \frac{9}{5} - \sqrt{3} \right) K^6 (\sin \frac{\pi}{12})$$

を得ることができる．$I_B$ についても，変数変換

$$\frac{d}{dx} u^B(x) = \frac{d}{dy} \overline{u}^B(y)$$

を施し，保存量 (13)，及び $\beta$ の評価 (17) を用いることで，

$$I_B = \frac{1-x_0}{\varepsilon} - \left( 3 - \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \right) + C_{B,6} \frac{1}{x_0^6} \varepsilon^6 + o(\varepsilon^6) \quad (\varepsilon \to 0), \tag{20}$$

$$C_{B,6} := 12\sqrt{2}(3-\sqrt{3})K^6(\sin\frac{\pi}{12})$$

を示すことができる．よって，各項の展開 (19)，(20) を足し合わせ，(18) に注意すると，(5) を得ることができる．

□

# 4 数値解析

本講演では，$J(m,\varepsilon)$ を最大にする環境容量 $m^*$ を具体的に調べるため，射影勾配法を実装してその解析を試みたことを発表する．射影勾配法とは，$J(m,\varepsilon)$ の $m$ に関する第一変分を調べ，$J(m,\varepsilon)$ が増加する方向に $m$ を修正する技法である．この時，修正した $m$ が $X$ に入るように調整をしなくてはならない．しかし，残念ながら射影勾配法を実装しても数値解析で分かることは停留点の形状のみで，最適制御をいきなり調べることは不可能である．理論的な発展と並行して研究を進めたい．

本講演では，以下に述べる $X_\delta$ のどのような環境容量からスタートしても，$J(m,\varepsilon)$ が増加する方向に環境容量を修正するアルゴリズムを実装することを考え，これに成功したことを発表する．$X$ 内での処理についても，講演で触れたい．

注：このセクションでは，拡散係数 $\varepsilon$ は動かさないため，$J(m,\varepsilon)$ を $J(m)$ と表記する．

**命題 4.1.**

$$X_\delta := \left\{ m \in L^\infty(\Omega) \middle| \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega m(x)dx = \delta \right\}$$

とする．任意の初期条件 $m_0 \in X_\delta$ に対し，修正量 $m_n \in X_\delta$ を次のように定めると，$J(m)$ の増大列になる．

$$m_n = m_{n-1} + \mu l_{n-1} \, (\forall n \in \boldsymbol{N})$$

ただし，

$$\mu : \textit{sufficiently small},$$

$$l_{n-1} \in L^\infty(\Omega) = u_{n-1}p_{1,n-1} + p_{2,n-1} \ (\forall n \in \boldsymbol{N})$$

である．ここで，

$u_{n-1} = u(m_{n-1})$,

$p_{1,n-1}$ は次の方程式の解

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta p_{1,n-1} - (m_{n-1} - 2u_{n-1})p_{1,n-1} = 1 & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial p_{1,n-1}}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{21}$$

$p_{2,n-1}$ は次で与えられる定数である.

$$p_{2,n-1} = \frac{-1}{|\Omega|}\int_\Omega (u_{n-1}p_{1,n-1} - 2m_{n-1}B)dx.$$

## 参考文献


[1] R. S. Cantrell and C. Cosner, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in a disrupted envronments*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **112A** (1989), 293–318.

[2] R. S. Cantrell and C. Cosner, Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations, Series in Mathematical and Computational Biology, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 2003,

[3] W. Ding, H. Finotti, S. Lenhart, Y. Lou, Q. Ye, *Optimal control of growth coefficient on a steady-state population model*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **11** (2010), 688–704.

[4] S. Liang, Y. Lou, *On the dependence of population size upon random dispersal rate*, Special issue on "PDE Models from Biological Processess," Disc. Cont. Dynam. Sys. Series B, **17** (2012), 2771–2788.

[5] J. G. Skellam, *Random dispersal in theoretical populations*, Biometrika, **38** (1951), 196-218.

[6] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, Correspondance Mathématique et Physique Publiée par A. Quételet, **10** (1838), 113–121.