

# 行列戸田積と三角圏

百瀬 康弘\*

Yasuhiro Momose

信州大学大学院 総合工学系研究科

本研究は新海健一郎氏 (信州大学) との共同研究に基づく結果である.

戸田積は本来, 代数的位相幾何学の分野においてホモトピー集合の計算をする為に用いられてきた. 行列戸田積は Barratt によって戸田積が一般化されたものである. そして, Hardie–Kamps–Marcum [2] は行列戸田積を基点付き位相空間の圏上から 0-対象を持つ 2-圏上へ以下のような 2-射の集合として拡張した.

**定義 1.**  $\mathcal{C}$  が 2-圏とは以下を満たすものをいう.

1.  $\mathcal{C}$  は圏である.
2.  $\mathcal{C}$  の対象  $x, y$  に対して,  $\text{Ob}(\mathcal{C}(x, y)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  である圏  $\mathcal{C}(x, y)$  をもつ.
3.  $\mathcal{C}$  の対象  $x, y, z$  に対して, 射の合成が関手  $\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z)$  となり,  $1_{1_y} \circ - = 1_{\text{Mor}(\mathcal{C}(x, y))}$  かつ  $- \circ 1_{1_y} = 1_{\text{Mor}(\mathcal{C}(y, z))}$  を満たす.

$\mathcal{C}(x, y)$  の射を 2-射と呼ぶ.

**定義 2.** 2-圏  $\mathcal{C}$  が 0-対象をもつとは,  $\mathcal{C}$  の任意の対象  $x$  に対して,  $\mathcal{C}(0, x)$  と  $\mathcal{C}(x, 0)$  がそれぞれ 1 つの対象かつ 1 つの射から成る圏であるような対象  $0$  が存在するときをいう.

**定義 3.**  $\mathcal{C}$  を 0-対象をもつ 2-圏とし,  $\mathcal{C}$  上の次の図式を与える.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ X_1 & \xrightarrow{g_1} & Y \xrightarrow{h} Z \\ & \searrow & \nearrow \\ & & 0 \end{array} \quad (1)$$

また,  $\mathcal{C}$  の射  $u$  に対して  $\mathcal{A}(u) = \{ F : u \rightarrow u \mid F \text{ は可逆な 2-射} \}$  と定義するとき  $\mathcal{A}(0 : W \rightarrow Z)$  はアーベル群とする. さらに,  $U : 0 \Rightarrow h \circ g_1$  と  $S : g_1 \circ f_1 \Rightarrow g_2 \circ f_2$  と  $V : 0 \Rightarrow h \circ g_2$  を可逆な 2-射とし  $\phi = -Vf_2 + hS + Uf_1$  とする. このとき, 行列戸田積を以下で定義する.

$$\left\{ \begin{array}{c} h, \quad g_2, \quad f_2 \\ g_1, \quad f_1 \end{array} \right\} = \phi + \mathcal{A}(0 : X_2 \rightarrow Z) \circ f_2 + h \circ \mathcal{A}(0 : W \rightarrow Y) + \mathcal{A}(0 : X_1 \rightarrow Z) \circ f_1.$$

本研究は, (一財) 長野県科学振興会の助成を受け実施したものです.  
\*e-mail: momose@math.shinshu-u.ac.jp

一方, 基点付き位相空間の圏のホモトピー圏は三角圏であり, Muro [4] は戸田積を三角圏上へ以下のような射の集合として拡張した.

**定義 4.**  $(\mathcal{J}, \Sigma)$  を三角圏とし,  $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$  を  $g \circ f = 0$  かつ  $h \circ g = 0$  を満たす  $\mathcal{J}$  上の図式とする. また,  $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i} C_f \xrightarrow{q} \Sigma W$  を  $f$  を含む完全三角系列とし,  $a: C_f \rightarrow Y$  を  $g = a \circ i$  を満たす射,  $b: \Sigma W \rightarrow Z$  を  $h \circ a = b \circ q$  を満たす射とする. このとき, 戸田積を以下で定義する.

$$\{h, g, f\} = b + h \circ \mathcal{J}(\Sigma W, Y) + \mathcal{J}(\Sigma X, Z) \circ (\Sigma f).$$

但し,  $\mathcal{J}(A, B)$  は  $A$  から  $B$  への射全体の集合である.

$\mathcal{A}$  を加法圏とする. 2-圏の例として鎖複体の圏  $Ch(\mathcal{A})$  が挙げられるが, 基点付き位相空間の圏と同様にそのホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  はシフト関手と完全三角系列の類を適切に定めることにより三角圏  $(K(\mathcal{A}), \Sigma)$  となる. ([1].) 主定理では, 鎖複体の 2-圏上の行列戸田積を鎖複体のなす三角圏上のある戸田積として記述した.

**定理 5.**  $Ch(\mathcal{A})$  上で (1) の図式を与える. また, 鎖複体  $X_1$  と  $X_2$  の直和 (直積) を  $X_1 \vee X_2$  と表し,  $(-f_1 \vee f_2)\Delta: W \rightarrow X_1 \vee X_2$  を直積の普遍性により  $-f_1$  と  $f_2$  から得られた射とする. 同様に,  $\nabla(g_1 \vee g_2): X_1 \vee X_2 \rightarrow Y$  を直和の普遍性により  $g_1$  と  $g_2$  から得られた射とする. このとき,  $\mathcal{A}$  のホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  上の図式

$$W \xrightarrow{(-f_1 \vee f_2)\Delta} X_1 \vee X_2 \xrightarrow{\nabla(g_1 \vee g_2)} Y \xrightarrow{h} Z$$

に対して  $\nabla(g_1 \vee g_2) \circ (-f_1 \vee f_2)\Delta = 0$  かつ  $h \circ \nabla(g_1 \vee g_2) = 0$  となり, 以下が成り立つ.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} h, & g_2, & f_2 \\ & g_1, & f_1 \end{array} \right\} = \{h, \nabla(g_1 \vee g_2), (-f_1 \vee f_2)\Delta\}.$$

行列戸田積は加法圏を調べる道具となるが, 今後どのような加法圏を調べるかが重要となる. 去年の講演で扱った擬スキームイドに対して [3] で単体的複体との関係が示された. それらからスキームイド代数や Stanley-Reisner 環が構成されるが, その上の加群の圏に対して行列戸田積を適用し組合せ論的性質を研究するのが今後の課題である.

## 参考文献

- [1] M. Banagl. *Topological invariants of stratified spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [2] K. A. Hardie, K. H. Kamps, and H. J. Marcum. A categorical approach to matrix Toda brackets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(12):4625–4649, 1995.
- [3] Katsuhiko Kuribayashi and Yasuhiro Momose. On Mitchell’s embedding theorem for a quasi-schemoid. arXiv:1507.01745v2 math. CT.
- [4] Fernando Muro. A triangulated category without models. arXiv:0703311v1 math. KT.