ある型の混合 Hodge 構造の分類空間のコンパクト化について

黒田　匡迪 (Kuroda Masamichi) *　北海道大学大学院　理学研究院　数学部門

概要

加藤和也氏, 中山能力氏, 臼井三平氏により, 混合 Hodge 構造の分類空間 D のその自己同型群 $\mathrm{Aut}(D)$ の離散部分群 Γ による商空間 $\Gamma\backslash D$ のトロイダル部分コンパクト化が構成された. それは Γ に対して, 適切な弱ファン Σ を与え, 冪零軌道の空間 D_Σ の Γ による商空間 $\Gamma\backslash D_\Sigma$ として与えられた. 本講演では, ある型の混合 Hodge 構造の分類空間について, そのコンパクト化の構造を具体的に紹介する. また, このコンパクト化と, 平面三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライ $\overline{P}_{1,3}$ あるいは, Alexeev 氏による完備なモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ との関係についての結果も紹介する.

1　はじめに

講演者は平面三次曲線 C と直線 L からなる半安定な組 (C, L) の GIT モジュライ $\overline{P}_{1,3}$ について研究を行ってきた. [Ku] では主に次の三つの結果が得られた. 一つ目は, 組 (C, L) の安定性の完全な分類を与え, GIT モジュライ $\overline{P}_{1,3}$ にあらわれる組の幾何学的な条件を決定した. 二つ目は, このモジュライ $\overline{P}_{1,3}$ と Alexeev 氏により構成された完備なモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ との間にある双有理写像 $f\colon \overline{P}_{1,3} \to \overline{AP}_{1,3}$ を与え, その性質を調べた. ここで, $\overline{AP}_{1,3}$ は高々, 結節点を持つ三次曲線 C と C の特異点を通らない直線 L からなる組 (C, L) のモジュライである. 三つ目は, これら二つのモジュライの粗い構造を見るために, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ のあるブローアップから $\overline{AP}_{1,3}, \overline{P}_{1,3}$ への自然な写像を構成した. さらにこれら二つの写像と上の双有理写像 f の関係を与えた.

最近では, このモジュライ $\overline{P}_{1,3}$ とある型の混合 Hodge 構造の分類空間のコンパクト化との比較の研究を行ってきた. 非特異三次曲線 E と, E と横断的に交わる直線 L からなる組 (E, L) 全体のなす開部分集合 $P_{1,3} \subset \overline{P}_{1,3}$ の各組に対して, 一次コホモロジー $H^1(E \setminus (E \cap L), \mathbb{Z})$ の混合 Hodge 構造を考えることで $P_{1,3}$ から, ある型の混合 Hodge 構造の分類空間 D をモノドロミー群 Γ で割った空間 $\Gamma\backslash D$ への周期写像 $P_{1,3} \to \Gamma\backslash D$ が定まる. $P_{1,3}$ のコンパクト化として $\overline{P}_{1,3}$ があり, $\Gamma\backslash D$ のコンパクト化として加藤和也氏, 中山能力氏, 臼井三平氏により構成されたトロイダル部分コンパクト化 $\Gamma\backslash D_\Sigma$ が知られているので, 周期写像のこれらのコンパクト化の境界への拡張を具体的に構成することで, $\overline{P}_{1,3}$ と $\Gamma\backslash D_\Sigma$ との比較を与えるというのが研究の手法である. 残念ながら, この周期写像の境界への拡張は煩雑なので, 上と同様にして $\overline{AP}_{1,3}$ の開部分集合 $AP_{1,3}$ から $\Gamma\backslash D$ への写像 $\phi\colon AP_{1,3} \to \Gamma\backslash D$ を構成して, この写像の境界への拡張を考える. 実際, 双有理写像 $\bar{\phi}\colon \overline{AP}_{1,3} \to \Gamma\backslash D_\Sigma$ に拡張することができる (定理 3.1). この双有理写像と [Ku] で構成した双有理写像 $f\colon \overline{P}_{1,3} \to \overline{AP}_{1,3}$ を合わせることで, $\overline{P}_{1,3}$ と $\Gamma\backslash D_\Sigma$ の比較を与えることができる (定理 4.1).

第二章では, 分類空間 $\Gamma\backslash D$ とそのコンパクト化 $\Gamma\backslash D_\Sigma$ を具体的に与える. 第三章では, 写像 $\phi\colon AP_{1,3} \to \Gamma\backslash D$ を具体的に与え, ϕ を双有理写像 $\bar{\phi}\colon \overline{AP}_{1,3} \to \Gamma\backslash D_\Sigma$ に拡張する. 第四章では, [Ku] の結果と合わせて, $\overline{P}_{1,3}$ と $\overline{AP}_{1,3}$ と $\Gamma\backslash D_\Sigma$ の関係を与える.

* E-mail: m-kuroda@math.sci.hokudai.ac.jp

2 分類空間 $\Gamma\backslash D$ とそのコンパクト化 $\Gamma\backslash D_\Sigma$

複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える．混合 Hodge 構造の型 $\Lambda = \left(H_0, W, (\langle,\rangle_w)_{w\in\mathbb{Z}}, (h^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}\right)$ を次で固定する：

- $H_0 = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}e_4$.
- W は $H_{0,\mathbb{R}} := \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}} H_0$ 上の増大フィルトレーションで次で定まるもの：

$$W_0 = 0 \subset W_1 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 \subset W_2 = H_{0,\mathbb{R}}.$$

- $\langle,\rangle_w$ は非退化 $\mathbb{R}$ 値双線形形式 $\mathrm{gr}_w^W \times \mathrm{gr}_w^W \to \mathbb{R}$ で, 各 $w\in\mathbb{Z}$ に対して, w が偶数なら対称となり, w が奇数なら歪対称となるもので, 次を満たすものとする：

$$\langle e_2',\ e_1'\rangle_1 = 1,\ \langle e_3',\ e_3'\rangle_2 = \langle e_4',\ e_4'\rangle_2 = 1,\ \langle e_3',\ e_4'\rangle_2 = -\frac{1}{2}.$$

- $h^{1,1}=2$, $h^{0,1}=h^{1,0}=1$ であり, これら以外の組 (p,q) に対して, $h^{p,q}=0$ とする.

但し, 各 $w\in\mathbb{Z}$ に対して, $\mathrm{gr}_w^W = W_w/W_{w-1}$ とし, e_1', e_2' (resp. e_3', e_4') を e_1, e_2 (resp. e_3, e_4) の gr_1^W (resp. gr_2^W) における像とする．ここで, 型 Λ の混合 Hodge 構造の分類空間 D とは以下の三つの条件を満たす $H_{0,\mathbb{C}} := \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} H_0$ 上の減少フィルトレーション F 全体のなす集合である：

(1) 任意の p, $q\in\mathbb{Z}$ に対して, $\dim\left(F^p\left(\mathrm{gr}_{p+q}^W\right)/F^{p+1}\left(\mathrm{gr}_{p+q}^W\right)\right) = h^{p,q}$.
(2) 任意の p, q, $w\in\mathbb{Z}$ で $p+q>w$ を満たすものに対して, $\langle,\rangle_w$ を $F^p\left(\mathrm{gr}_w^W\right)\times F^q\left(\mathrm{gr}_w^W\right)$ に制限すると零写像になる.
(3) 任意の p, q, $w\in\mathbb{Z}$ で $p+q=w$ を満たすものと任意の 0 でない $x\in F^p\left(\mathrm{gr}_w^W\right)\cap\overline{F^q\left(\mathrm{gr}_w^W\right)}$ に対して, $i^{p-q}\langle x,\bar{x}\rangle_w > 0$.

但し, $F\left(\mathrm{gr}_w^W\right)$ は F によって誘導された $\mathrm{gr}_{w,\mathbb{C}}^W := \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{gr}_w^W$ 上の減少フィルトレーションである．上の条件 (1) と (2) 満たす $H_{0,\mathbb{C}}$ 上の減少フィルトレーション F 全体のなす集合を $\check{D}$ とかく．

以下, $\mathcal{H}$ を上半平面とする． 各 $\tau\in\mathcal{H}$ と z_1, $z_2\in\mathbb{C}$ に対し, $H_{0,\mathbb{C}}$ 上の減少フィルトレーション $F = F(\tau, z_1, z_2)$ を次で定める：

$$0 = F^2 \subset F^1 = \mathbb{C}(\tau e_1 + e_2) + \mathbb{C}(z_1 e_1 + e_3) + \mathbb{C}(z_2 e_1 + e_4) \subset F_0 = H_{0,\mathbb{C}}.$$

このとき, 簡単な計算により, $D = \{F(\tau, z_1, z_2)\mid \tau\in\mathcal{H}, z_1, z_1\in\mathbb{C}\}$ が得られ, 複素解析多様体としての同型 $D\simeq\mathcal{H}\times\mathbb{C}^2$ が得られる．以下, この同型で同一視する.

次にモノドロミー群 Γ を W と整合する H_0 の $\mathbb{Z}$ 上の自己同型 g で, すべての $w\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{gr}_w^W(g) : \mathrm{gr}_w^W \to \mathrm{gr}_w^W$ が $\langle,\rangle_w$ と整合するもの全体のなす群 $G_{\mathbb{Z}}$ とする．$G_{\mathbb{Z},u} := \left\{g\in G_{\mathbb{Z}}\mid \mathrm{gr}_w^W = 1\ \left({}^\forall w\in\mathbb{Z}\right)\right\}$ とし, 各 $w\in\mathbb{Z}$ に対して, $G_{\mathbb{Z}}\left(\mathrm{gr}_w^W\right)$ を組 $\left((H_0\cap W_w)/(H_0\cap W_{w-1}),\ \langle,\rangle_w\right)$ に関する $G_{\mathbb{Z}}$ とする．このとき

$$G_{\mathbb{Z},u} = \left\{\left.\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \\ \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{O}} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}\ \right|\ a_1, a_2, a_3, a_4\in\mathbb{Z}\right\} \simeq \mathbb{Z}^4, \tag{1}$$

$$\Gamma = G_{\mathbb{Z}} = \left\{\left.\begin{bmatrix} A_1 & \begin{matrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4\end{matrix} \\ O & A_2 \end{bmatrix}\ \right|\ \begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4\in\mathbb{Z}, \\ A_1\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ A_2\in G_{\mathbb{Z}}\left(\mathrm{gr}_2^W\right)\end{matrix}\right\}$$

が得られる．(1) の同型は群同型である．また，

$$G_{\mathbb{Z}}\left(\mathrm{gr}_2^W\right)=\left\langle\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\rangle\simeq\mathfrak{S}_3\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となることもわかる．$G_{\mathbb{Z},u}$ を含む Γ の部分群 Γ_1, Γ_2 を次で定める：

$$\begin{aligned}G_{\mathbb{Z},u}\subset\Gamma_1&=\left\{\left[\begin{array}{cc|cc}1&a&a_1&a_3\\0&1&a_2&a_4\\ \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{O}}&1&0\\ &&0&1\end{array}\right]\ \middle|\ a,a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{Z}\right\}\\ \subset\Gamma_2&=\left\{\begin{bmatrix}A_1&\begin{matrix}a_1&a_3\\a_2&a_4\end{matrix}\\ O&\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\end{bmatrix}\ \middle|\ A_1\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{Z}\right\}\subset\Gamma.\end{aligned}$$

ここで，$\Gamma=G_{\mathbb{Z}}$ は D に自然に作用するが，それは次で与えられる：

$$\Gamma\times D\longrightarrow D,\ (g,F(\tau,z_1,z_2))\longmapsto g\cdot F(\tau,z_1,z_2)=F(\tau',z_1',z_2'),$$
$$\tau'=A_1\cdot\tau=\frac{a\tau+b}{c\tau+d},$$
$$\begin{bmatrix}z_1'&z_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{z_1}{c\tau+d}+a_1-a_2\tau'&\frac{z_2}{c\tau+d}+a_3-a_4\tau'\end{bmatrix}A_2^{-1},$$

但し，$g=\begin{bmatrix}A_1&\begin{matrix}a_1&a_3\\a_2&a_4\end{matrix}\\O&A_2\end{bmatrix}\in\Gamma$ とし，$A_1=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とする．この作用による商空間を考えると，次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccccc}G_{\mathbb{Z},u}\backslash D&\longrightarrow&\Gamma_1\backslash D&\longrightarrow&\Gamma_2\backslash D&\longrightarrow&\Gamma\backslash D\\ \downarrow&&\downarrow&&\downarrow&&\downarrow\\ D\left(\mathrm{gr}_1^W\right)&\longrightarrow&\Gamma_1'\backslash D\left(\mathrm{gr}_1^W\right)&\longrightarrow&\Gamma_2'\backslash D\left(\mathrm{gr}_1^W\right)&\longrightarrow&\Gamma'\backslash D\left(\mathrm{gr}_1^W\right)\end{array}\tag{2}$$

ここで，$D\left(\mathrm{gr}_1^W\right)$ は型 $\left((H_0\cap W_1)/(H_0\cap W_0),\langle,\rangle_1,(h^{p,q})_{p+q=1}\right)$ の Hodge 構造の分類空間であり，縦の写像は標準的全射である．また，Γ_1' (resp. Γ_2', Γ') は $\mathrm{Aut}(H_0)\to\mathrm{Aut}(\mathrm{gr}_1^W)$ による Γ_1 (resp. Γ_2, Γ) の像である．このとき，簡単な計算により，次が得られる：

$$D\left(\mathrm{gr}_1^W\right)=\mathcal{H},\quad\Gamma_1'=\begin{bmatrix}1&\mathbb{Z}\\0&1\end{bmatrix}\simeq\mathbb{Z},\quad\Gamma_2'=\Gamma'=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

さらに，上の作用により，

$$\begin{aligned}\Gamma_1'\backslash D\left(\mathrm{gr}_1^W\right)=\mathbb{Z}\backslash\mathcal{H}&\xrightarrow{\sim}\Delta^\times=\{q\in\mathbb{C}\mid |q|<1\},\\ \tau\bmod\mathbb{Z}&\longmapsto\exp(2\pi i\tau),\\ \Gamma_2'\backslash D\left(\mathrm{gr}_1^W\right)=\Gamma'\backslash D\left(\mathrm{gr}_1^W\right)=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}&\xrightarrow{\sim}\mathbb{C},\\ \tau\bmod\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})&\longmapsto j(\tau)\end{aligned}$$

が従う．但し，$j(\tau)$ は j-不変量である．さらに，次が得られる：

$$\begin{aligned}G_{\mathbb{Z},u}\backslash D=\mathbb{Z}^4\backslash\left(\mathcal{H}\times\mathbb{C}^2\right)&=\bigcup_{\tau\in\mathcal{H}}\left(E_\tau\times E_\tau\right),\quad E_\tau:=\mathbb{C}/\left(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}\right),\\ \Gamma_1\backslash D=\Gamma_1\backslash\left(\mathcal{H}\times\mathbb{C}^2\right)&=\bigcup_{q\in\Delta^\times}\left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\right),\end{aligned}$$

$$\Gamma_2\backslash D=\Gamma_2\backslash\left(\mathcal{H}\times\mathbb{C}^2\right)=\bigcup_{j\in\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\right),\quad j=j\left(\frac{1}{2\pi i}\log q\right),$$
$$\Gamma\backslash D=\Gamma\backslash\left(\mathcal{H}\times\mathbb{C}^2\right)=\bigcup_{j\in\mathbb{C}}G_2\backslash\left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\right),\quad j=j\left(\frac{1}{2\pi i}\log q\right),\ G_2:=G_{\mathbb{Z}}\left(\mathrm{gr}_2^W\right).$$

ここで, $\bigcup_{\tau\in\mathcal{H}}(E_\tau\times E_\tau)\to\mathcal{H}$ のファイバー $E_\tau\times E_\tau$ と $\bigcup_{q\in\Delta^\times}\left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\right)\to\Delta^\times$ のファイバー $\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}$ は同型

$$\begin{gathered}E_\tau\times E_\tau\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}},\\(z_1 \bmod \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z},z_2 \bmod \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})\longmapsto\left(\exp(2\pi iz_1) \bmod q^{\mathbb{Z}},\exp(2\pi iz_2) \bmod q^{\mathbb{Z}}\right)\end{gathered}$$

で同一視される. この同一視の下で, G_2 の $\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}$ への作用が誘導される：

$$\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\cdot([w_1],[w_2])=\left([w_1^{-1}w_2^{-1}],[w_2]\right),\tag{3}$$
$$\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\cdot([w_1],[w_2])=\left([w_2^{-1}],[w_1^{-1}]\right),\tag{4}$$
$$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\cdot([w_1],[w_2])=\left([w_1^{-1}],[w_2^{-1}]\right).\tag{5}$$

以上より, (2) は次の可換図式になる：

$$\begin{array}{ccccccc}\bigcup_{\tau\in\mathcal{H}}(E_\tau\times E_\tau)&\longrightarrow&\bigcup_{q\in\Delta^\times}\left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\right)&\longrightarrow&\bigcup_{j\in\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\right)&\longrightarrow&\bigcup_{j\in\mathbb{C}}G_2\backslash\left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\right)\\\downarrow&&\downarrow&&\downarrow&&\downarrow\\\mathcal{H}&\longrightarrow&\Delta^\times&\longrightarrow&\mathbb{C}&=\!=\!=&\mathbb{C}\end{array}$$

以下, 商空間 $\Gamma\backslash D=\bigcup_{j\in\mathbb{C}}G_2\backslash\left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}\right)$ のコンパクト化を構成する.

加藤和也氏, 中山能力氏, 臼井三平氏により, 分類空間 $\Gamma\backslash D$ のトロイダル部分コンパクト化が構成された ([KNU09], [KNU11], [KNU13]). それは Γ に対して, 適切な弱ファン Σ を与え, 冪零軌道の空間 D_Σ の Γ による商空間 $\Gamma\backslash D_\Sigma$ として与えられた. D_Σ は D と Σ から簡単な計算で求められるので, 適切な Σ を構成することが本質的な問題である. ここでは, 次の手順で構成していく：

手順 1　Γ_1 に対して, 適切な Σ_1 を構成する.
手順 2　$\Sigma:=\left\{\mathrm{Ad}(\gamma)\sigma:=\gamma\sigma\gamma^{-1}\mid\gamma\in\Gamma_1,\sigma\in\Sigma_1\right\}$ として, $\Gamma\backslash D_\Sigma$ を計算する.

いくつかの用語の定義から始める. $A=\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ に対して, $\mathfrak{g}_A:=\mathrm{Lie}(G_A)$ とする. これは

$$\left\{X\in\mathrm{End}_A(H_{0,A})\,\middle|\,\begin{array}{l}\text{全ての } w \text{ に対して}, X(W_w)\subset W_w\text{であり},\\\text{全ての } w,x,y \text{ に対して}, \langle\mathrm{gr}_w^W(X)(x),y\rangle_w+\langle x,\mathrm{gr}_w^W(X)(y)\rangle_w=0\end{array}\right\}$$

と同一視される. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の部分集合 σ が冪零錐であるとは, 次の二つの条件を満たすことをいう：

(1) σ の全ての元は冪零であり, 任意の N, $N'\in\sigma$ に対し, $H_{0,\mathbb{R}}$ の線形変換として $NN'=N'N$ となる.
(2) σ は有限生成である. すなわち, 有限個の σ の元 N_1, …, N_n が存在して, $\sigma=\sum_{j=1}^n\mathbb{R}_{\geq0}N_j$ となる.

上の条件 (2) の N_j が $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ の元でとれるとき, σ を有理冪零錐という. 冪零錐 σ の $H_{0,\mathbb{R}}$ への作用が W に関して admissible であるとき, σ は admissible であるという (詳細は [KNU11], 1.1.2 を見よ).

$N_1, \ldots, N_n \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ を互いに可換な冪零元とし, F を $\check{D}$ の元とする. 次の三つの条件を満たすとき, $(N_1, \ldots, N_n, F)$ は冪零軌道を生成するという：

1. 錐 $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{R}_{\geq 0} N_j$ の $H_{0,\mathbb{R}}$ への作用が W に関して admissible である.
2. 各 j と任意の $p \in \mathbb{Z}$ に対して, $N_j F^p \subset F^{p-1}$ を満たす.
3. $y_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が十分大きいとき, $\exp\left(\sum_{j=1}^{n} i y_j N_j\right) F \in D$ を満たす.

これらの条件は錐 $\sigma := \sum_{j=1}^{n} \mathbb{R}_{\geq 0} N_j$ とフィルトレーション F にのみ依存するので, これらの条件を満たすとき, 組 (σ, F) は冪零軌道を生成するともいう.

σ を冪零錐とする. $\check{D}$ の部分集合 Z は, ある $F \in Z$ に対して次の条件 4. と 5. が成り立つとき, σ-冪零軌道であるという：

4. $Z = \exp(\sigma_{\mathbb{C}}) F$ である. 但し, $\sigma_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ における σ の $\mathbb{C}$-線形な延長である.
5. (σ, F) は冪零軌道を生成する.

このような組 (σ, Z) を冪零軌道と呼ぶ. 条件 4. と 5. は一つの $F \in Z$ で成り立てば, 全ての $F \in Z$ で成り立つことに注意せよ.

弱ファン Σ とは, 以下の条件 (1) と (2) を満たすシャープな有理冪零錐からなる空でない集合である. ここで, 冪零錐 σ がシャープであるとは $\sigma \cap (-\sigma) = 0$ を満たすことをいう：

(1) $\sigma \in \Sigma$ ならば, σ のフェイスも Σ に含まれる.
(2) $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ は共通の内点を持つと仮定する. ある $F \in \check{D}$ が存在して, (σ, F) と (σ', F) は冪零軌道を生成するならば $\sigma = \sigma'$ である.

弱ファン Σ に対して,

$$D_{\Sigma} := \{(\sigma, Z) : \text{冪零軌道} \mid \sigma \in \Sigma\}$$

とする. このとき, 自然な埋め込み $D \subset D_{\Sigma}$, $F \mapsto (\{0\}, F)$ が存在する.

弱ファン Σ と $G_{\mathbb{Z}}$ の部分群 Γ が整合するとは, 次の条件 1. を満たすことをいう：

1. 任意の $\gamma \in \Gamma$ と任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して, $\mathrm{Ad}(\gamma)\sigma := \gamma\sigma\gamma^{-1} \in \Sigma$ を満たす.

Σ と Γ が整合するならば, Γ は D_{Σ} に次で作用する：

$$\Gamma \times D_{\Sigma} \to D_{\Sigma}, \ (\gamma, (\sigma, Z)) \mapsto \gamma \cdot (\sigma, Z) := (\mathrm{Ad}(\gamma)\sigma, \gamma Z).$$

上の条件 1. に加えて, 次の条件 2. を満たすとき, Σ と Γ は強く整合するという：

2. $\sigma \in \Sigma$ ならば, 任意の σ の元は aN の和でかける. 但し, $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ であり, N は $\exp(N) \in \Gamma$ を満たす σ の元である.

このとき, 次が成り立つ.

定理 2.1 (Thm. 2.5.5, [KNU11])**.** *Σ を弱ファンとし, Γ を Σ と強く整合する $G_{\mathbb{Z}}$ の部分群とする. このとき, 位相空間 $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ は Hausdorff である.*

2.1 手順 1 : Σ_1 の構成

Γ_1 と強く整合する弱ファン Σ_1 を次で定める：

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1 := \left\{ \{0\}, \sigma^j_{n,m} \ (n, m \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3, 4) \right\}, \\
&\sigma^1_{n,m} := \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m},\ \sigma^2_{n,m} := \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n+1,m},\ \sigma^3_{n,m} := \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m+1}, \\
&\sigma^4_{n,m} := \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n+1,m} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m+1} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n+1,m+1}, \\
&N_{n,m} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & n & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

このとき, 次の可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_1 \backslash D = \bigcup_{q \in \Delta^\times} \left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \right) & \hookrightarrow & \Gamma_1 \backslash D_{\Sigma_1} = \Gamma_1 \backslash D \cup \left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty) \right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Delta^\times & \hookrightarrow & \Delta
\end{array}$$

ここで, 右側の縦の写像の $0 \in \Delta$ のファイバーは 0 と ∞ を同一視して得られる $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の商 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty)$ のファイバー積である． また, $0 \in \Delta$ のファイバー $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty)$ の元 $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$(resp. $(0 = \infty, w_2) \in (0 = \infty) \times \mathbb{C}^\times$, $(w_1, 0 = \infty) \in \mathbb{C}^\times \times (0 = \infty)$, $(0 = \infty, 0 = \infty)$) は冪零軌道 $(\sigma^1_{0,0}, F(\mathbb{C}, z_1, z_2))$ (resp. $(\sigma^2_{0,0}, F(\mathbb{C}, \mathbb{C}, z_2))$, $(\sigma^3_{0,0}, F(\mathbb{C}, z_1, \mathbb{C}))$, $(\sigma^4_{0,0}, F(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \mathbb{C}))$) の類に対応している. 但し, $\exp(2\pi i z_j) = w_j$ $(j = 1, 2)$ である.

2.2 手順 2 : Σ の定義と $\Gamma \backslash D_\Sigma$ の計算

$\Sigma = \left\{ \mathrm{Ad}(\gamma)\sigma = \gamma\sigma\gamma^{-1} \mid \gamma \in \Gamma_1, \sigma \in \Sigma_1 \right\}$ とすると, Σ は Γ と強く整合する弱ファンであり, 次の可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma \backslash D = \bigcup_{j \in \mathbb{C}} G_2 \backslash \left(\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \right) & \hookrightarrow & \Gamma \backslash D_\Sigma = \Gamma \backslash D \cup \left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty) \right) / \sim \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}
\end{array}$$

ここで, 右側の縦の写像の $j = \infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ におけるファイバー $\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty) \right) / \sim$ は,

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0 \sim \infty) \right) / \sim = G_2 \backslash & \left(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \right) \\
& \cup \left((0 = \infty) \times \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times \times (0 = \infty) \right) / \sim \\
& \cup (0 = \infty) \times (0 = \infty)
\end{aligned}$$

と分解できる． このとき G_2 は $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ に (3), (4), (5) と同様に作用し, $(0 = \infty) \times \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times \times (0 = \infty)$ における同値関係は $(w_2, 0 = \infty) \sim (0 = \infty, w_2) \sim \left(0 = \infty, w_2^{-1} \right)$ で定める． ここで $W := ((0 = \infty) \times \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times \times (0 = \infty)) / \sim \cup (0 = \infty) \times (0 = \infty)$ とし, W を同型

$$W = \mathbb{C}^\times / \left(z \sim z^{-1} \right) \cup (0 = \infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},\ [z] \mapsto z + z^{-1}$$

で $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ と同一視する.

3 Alexeev のモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ との比較

上で構成した $\Gamma\backslash D_\Sigma$ と V. Alexeev 氏により [A02] において構成された完備モジュライ空間 $\overline{AP}_{1,3}$ との比較を与える．$\overline{AP}_{1,3}$ は高々, 結節点を持つ三次曲線 C と C の特異点を通らない直線 L からなる組 (C,L) のモジュライである．特に, 各点 $(C,L) \in \overline{AP}_{1,3}$ にあらわれる C は非特異三次曲線, 三角形, 横断的に交わる直線と二次曲線, あるいは結節三次曲線のいずれかである．$AP_{1,3}$ を非特異三次曲線 C とそれに横断的に交わる直線 L の組からなる $\overline{AP}_{1,3}$ の開部分集合とする．$AP_{1,3}$ の各点 (C,L) に, その混合 Hodge 構造 $(H^1(C \setminus (C\cap L)), W, F)$ を対応させることで, 分類空間 $\Gamma\backslash D$ への写像が定まる．具体的には, 次のように定式化できる．任意の点 $(C,L) \in AP_{1,3}$ に対して, C は非特異三次曲線であり, $C\cap L$ は相異なる三点なので, ある $\tau \in \mathcal{H}$ が存在して, $C \simeq E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ となり, $C \cap L \simeq \{[z_1],[z_2],[-z_1-z_2]\} \subset E_\tau$ とかける．このとき, $AP_{1,3}$ から $\Gamma\backslash D$ への写像を次で定める：

$$\phi : AP_{1,3} \longrightarrow \Gamma\backslash D, \quad (C,L) \longmapsto [F(\tau, z_1, z_2)].$$

この写像の境界への拡張を考える．$\overline{AP}_{1,3}$ の点 (C,L) で, C が結節三次曲線である場合, 適当な座標 $(y_0 : y_1 : y_2)$ を用いて

$$C : y_0^3 - y_1^3 = 3y_0y_1y_2$$

とかける．各 $w \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ に対し, C の点を $p_w := (-3w : -3w^2 : w^3-1)$ で定めると, $p_0 = p_\infty = (0:0:1)$ が結節点であり, $C = \{p_w \mid w \in \mathbb{C}^\times\} \cup \{p_0 = p_\infty\}$ となる．任意の $p_{w_1}, p_{w_2} \in C \setminus \{$ 結節点 $\}$ に対して,

$$\begin{aligned} p_{w_1} \circ p_{w_2} &:= p_{w_1} \text{ と } p_{w_2} \text{ を通る直線と } C \text{ との第三交点} = p_{(w_1w_2)^{-1}}, \\ p_{w_1} \cdot p_{w_2} &:= p_1 \circ (p_{w_1} \circ p_{w_2}) = p_1 \circ p_{(w_1w_2)^{-1}} = p_{w_1w_2} \end{aligned} \tag{6}$$

とすると, (6) により $C \setminus \{$ 結節点 $\}$ に郡構造が定まり, 群同型 $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} C \setminus \{$ 結節点 $\}$, $w \longmapsto p_w$ が得られる．L は C の結節点を通らないので, $C \cap L = \left\{p_{w_1}, p_{w_2}, p_{(w_1w_2)^{-1}}\right\}$ とかける．このとき,

$$\bar{\phi} : (C,L) \longmapsto (w_1, w_2) \bmod G_2 \in G_2\backslash \left(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times\right) \subset \left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0\sim\infty) \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0\sim\infty)\right)/\sim$$

とする．これは定義可能であり, 自然な逆写像も定義可能である．さらに次が成り立つ：

定理 3.1. ϕ は双有理写像 $\bar{\phi} : \overline{AP}_{1,3} \longrightarrow \Gamma\backslash D_\Sigma$ に拡張できる．このとき, $\bar{\phi}$ の基点集合は $W_{\mathrm{red}} := \{(C,L) \in \overline{AP}_{1,3} \mid C$ は可約 $\} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ であり, $\bar{\phi}^{-1}$ の基点集合は $W \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ である．

4 GIT モジュライ $\overline{P}_{1,3}$ との比較

講演者は [Ku] において, 射影平面内の三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライ $\overline{P}_{1,3}$ の研究を行った．この章では [Ku] における結果と今回の結果の関係について述べる．まず, [Ku] における結果を簡単に述べる．但し, [Ku] では標数が 2, 3 でない代数閉体 k 上で考えていた．

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2])$ 上の一次斉次多項式全体 $\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]_1$ の双対空間を V とし, $\mathbb{P}(V) := \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(V))$, $\mathbb{P}(S^3V) := \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(S^3V))$ とする．それぞれ, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 内の全ての直線と, 全ての三次曲線から

なる空間を表している．PGL(3) の $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ への自然な作用から, ファイバー積 $\mathbb{P}(S^3V)\times\mathbb{P}(V)$ への作用が誘導される．この作用による半安定な組全体 $\left(\mathbb{P}(S^3V)\times\mathbb{P}(V)\right)^{ss}$ の GIT-商を $\overline{P}_{1,3}$ とする：

$$\left(\mathbb{P}(S^3V)\times\mathbb{P}(V)\right)^{ss}\longrightarrow\left(\mathbb{P}(S^3V)\times\mathbb{P}(V)\right)^{ss}//\mathrm{PGL}(3)=:\overline{P}_{1,3}.$$

半安定な組は次の全てを満たす組である：C は被約かつ三重点をもたず, L は C に含まれず, L は C の特異点を通らず, L は C に三重で接しない．特に, C は非特異三次曲線, 三角形, 直線と二次曲線（接してもよい）, 結節三次曲線, 尖点三次曲線のいずれかである (詳細は [Ku] の第三章を参照せよ).

$\overline{P}_{1,3}$ の部分集合で C が尖点三次曲線となるものを W_{Cusp} とし, $\overline{AP}_{1,3}$ の部分集合で L が C に三重で接するものを W_{T} とすると, いずれも $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ と同型であることがわかり, 双有理写像 $f:\overline{P}_{1,3}\to\overline{AP}_{1,3}$ で f の基点集合が W_{Cusp}, f^{-1} の基点集合が W_{T} となるものが得られる (詳細は [Ku] の第四章を参照せよ).

二つのモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ と $\overline{P}_{1,3}$ の構造を調べる為に, $X:=SQ_{1,3}\times\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\times\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ のあるブローアップから $\overline{AP}_{1,3}$，$\overline{P}_{1,3}$ への自然な写像を構成した．ここで, $SQ_{1,3}$ は中村郁氏により [Na99] において構成された Hesse の三次曲線のモジュライである．X の各点は Hesse の三次曲線 C と直線 L からなる組

$$C:\mu_0(x_0^3+x_1^3+x_2^3)=3\mu_1x_0x_1x_2,\ L:b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2=0 \tag{7}$$

に対応するので，X の一般の点から $\overline{AP}_{1,3}$ あるいは $\overline{P}_{1,3}$ への写像が定まるが, C が三角形をなし, かつ L が C の特異点を通るときに $\overline{AP}_{1,3}$，$\overline{P}_{1,3}$ への写像が定義できず, L が C に三重で接するときに $\overline{P}_{1,3}$ への写像が定義できない．これらの写像が定義できない部分集合に含まれる点への適切な近づけ方を考えると, 対応する点列は $\overline{AP}_{1,3}$ あるいは $\overline{P}_{1,3}$ の点に収束することがわかる．従って, 写像が定義できない部分集合を中心に適当なブローアップを行うことで, 例外集合からこれらの極限への写像を構成することが出来る．実際, 前者の定義できない部分集合を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム $\tilde{X}$ から $\overline{AP}_{1,3}$ への写像 $\varphi:\tilde{X}\to\overline{AP}_{1,3}$ が構成でき, さらに, $\tilde{X}$ における後者の定義できない部分集合の強変換を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム $\hat{X}$ から $\overline{P}_{1,3}$ への写像 $\psi:\hat{X}\to\overline{P}_{1,3}$ が構成できる．特に, これらの写像の構成の仕方から $\overline{AP}_{1,3}$ と $\overline{P}_{1,3}$ の (粗い) 構造が得られる．加えて, これらの写像と上で構成した双有理写像との間には次の関係がある．π を前者の, p を後者の三回ブローアップとすると, 次の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccc}\hat{X} & \xrightarrow{\psi} & \overline{P}_{1,3}\\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f}\\ \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{AP}_{1,3}\\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

このとき, $\varphi^{-1}(W_{\mathrm{T}})$ と $\psi^{-1}(W_{\mathrm{Cusp}})$ は各々 p の中心と例外集合である (詳細は [Ku] の第五章を参照せよ).

同様にして, X のあるブローアップから $\Gamma\backslash D_{\Sigma}$ への自然な写像を構成することができる．上で与えた X の一般の点から $\overline{AP}_{1,3}$ への写像と, さらに $\bar{\phi}$ とを合成することで $\Gamma\backslash D_{\Sigma}$ への写像が定まるが，C が三角形のとき, $\Gamma\backslash D_{\Sigma}$ への写像が定義できない．この写像が定義できない部分集合に含まれる点への適切な近づけ方を考えると, 対応する点列は $\Gamma\backslash D_{\Sigma}$ の点に収束することがわかる．

以下, 具体的な構成方法を与える ($\overline{AP}_{1,3}$ への写像については, [Ku] とまったく同じ構成である)．簡単のため, X のアファイン開集合 $U=\mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[s,t,u,\frac{1}{u^3-1}\right]\right)$，$s=b_0/b_2$，$t=b_1/b_2$，$u=\mu_0/\mu_1$ で考える．他のアファイン開集合でも同様に構成できる．$\overline{AP}_{1,3}$ への写像は $(s=0,u=0)\cup(t=0,u=0)$ でのみ定義で

きず, $\Gamma\backslash D_\Sigma$ への写像は $(u=0)$ で定義できない．まず, $\Gamma\backslash D_\Sigma$ への写像を $U\setminus(0,0,0)$ に拡張する．U の点 (s,t,u) に対応する組

$$C: u(x_0^3+x_1^3+x_2^3)=3x_0x_1x_2,\ L: sx_0+tx_1+x_2=0 \tag{8}$$

において, $y_0=x_0$，$y_1=-x_1$，$y_2=-ux_2$ とすると，$C: y_0^3-y_1^3-u^3y_2^3=3y_0y_1y_2,\ L: sy_0-ty_1-uy_2=0$ となる．ここで $u\to 0$ として得られる極限の組を (C_0,L_0) とすると,

$$C_0: y_0^3-y_1^3=3y_0y_1y_2,\ L_0: sy_0-ty_1=0$$

となる．C_0 は結節三次曲線であり, L_0 は C_0 の結節点 $p_0=p_\infty=(0:0:1)$ を通るので, $\overline{AP}_{1,3}$ には含まれない．一方, $C_0\cap L_0=\{p_{t/s},p_0,p_\infty\}$ なので, $st\neq 0$ のとき,

$$U\ni(s,t,0)\longmapsto\left[\left(0=\infty,\frac{t}{s}\right)\right]\in W\subset\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0\sim\infty)\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0\sim\infty)\right)/\sim$$

が定まる．以上より, 二つの有理写像

$$\begin{aligned}\varphi: U\longrightarrow\overline{AP}_{1,3},&\quad f\text{ の基点集合}=(s=u=0)\cup(t=u=0),\\ g: U\longrightarrow\Gamma\backslash D_\Sigma,&\quad g\text{ の基点集合}=\{(0,0,0)\}=(s=u=0)\cap(t=u=0)\end{aligned}$$

で, $u\neq 0$ において $g=\bar{\phi}\circ\varphi$ となるものが得られた．

次に, U を原点でブローアップし, それを $\pi_1: U'\to U$ とかく．U' への φ と g の拡張を構成する．U' は三つのアファイン開集合 U_1', U_2', U_3' からなるアファイン開被覆を持ち, 各々の局所座標系は $(s/u,t/u,u)$, $(s,t/s,u/s)$, $(s/t,t,u/t)$ である．U_1' 上で, φ を

$$\varphi:(s/u,t/u,u)\longmapsto\left\{\begin{array}{l}C: y_0^3+y_1^3+u^3y_2^3=3y_0y_1y_2,\\ L:(s/u)y_0+(t/u)y_1+y_2=0\end{array}\right.\in\overline{AP}_{1,3}$$

で定義する．この像は (8) において $x_0=y_0$, $x_1=y_1$, $x_2=uy_2$ としたものである．このとき C は非特異三次曲線あるいは結節三次曲線なので, U_1' 上で g を $g:=\bar{\phi}\circ\varphi$ で定めることができる．同様に, U_2' 上では, (8) において $x_0=y_0$, $x_1=y_1$, $x_2=sy_2$ としたもの φ の像として定義する：

$$\varphi:(s,t/s,u/s)\longmapsto\left\{\begin{array}{l}C:(u/s)\left(y_0^3+y_1^3+s^3y_2^3\right)=3y_0y_1y_2,\\ L: y_0+(t/s)y_1+y_2=0.\end{array}\right. \tag{9}$$

これは U における基点集合 (の一部)$(t=u=0)$ の強変換 $(t/s=u/s=0)$ でのみ定義できない有理写像になっている．一方, $u/s\neq 0$ のとき, C は非特異三次曲線なので, $(u/s\neq 0)$ 上で g を $g=\bar{\phi}\circ\varphi$ で定めることができるが, $u/s=0$, すなわち, $u=0$ の強変換において, g は定義できないので, 上と同様に適切な極限を考える．つまり, (9) において $y_0=z_0$, $y_1=-z_1$, $y_2=-(u/s)z_2$ として, $u/s\to 0$ とすると極限

$$C_0': z_0^3-z_1^3=3z_0z_1z_2,\ L_0': z_0-(t/s)z_1=0$$

が得られる．従って,

$$U_2'\ni(s,t/s,0)\longmapsto\left[\left(0=\infty,\frac{t}{s}\right)\right]\in W\subset\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0\sim\infty)\times\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/(0\sim\infty)\right)/\sim$$

が定まり, $g: U_2'\to\Gamma\backslash D_\Sigma$ を定義することができる．U_3' においても同様に定義することで, U における基点集合 (の一部)$(s=u=0)$ の強変換 $(s/t=u/t=0)$ でのみ定義できない有理写像 φ と U_3' 上の写像 g を構成することができる．特に, g に関しては不定点解消ができている．

以下, 同様に φ の U' における基点集合 $(t/s = u/s = 0) \cup (s/t = u/t = 0)$ を中心にブローアップを行って, 不定点解消を行うことで, X のブローアップから $\overline{AP}_{1,3}$ への写像を具体的に構成することができる (実際, あと二回のブローアップで φ の不定点解消ができる. 詳細は [Ku] を見よ).

X の他のアファイン開集合でも同様の操作で不定点解消ができるので, 一斉にブローアップすることで, X の一回ブローアップ X' から $\Gamma\backslash D_\Sigma$ への写像 $g : X' :\to \Gamma\backslash D_\Sigma$ と X' の二回ブローアップ $\tilde{X}$ から $\overline{AP}_{1,3}$ への写像 $\varphi : \tilde{X} \to \overline{AP}_{1,3}$ を具体的に構成することができる.

以上の結果をまとめると次が得られる：

定理 4.1. 次の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccc}
\hat{X} & \xrightarrow{\psi} & \overline{P}_{1,3} \\
{\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\
\tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{AP}_{1,3} \\
{\scriptstyle \pi_2\circ\pi_3}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \bar{\phi}} \\
X' & \xrightarrow{g} & \Gamma\backslash D_\Sigma \\
{\scriptstyle \pi_1}\big\downarrow & & \\
X & &
\end{array}$$

このとき,

- f の基点集合は $W_{\mathrm{Cusp}} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, f^{-1} の基点集合は $W_{\mathrm{T}} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ であり,
- $\bar{\phi}$ の基点集合は $W_{\mathrm{red}} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $\bar{\phi}^{-1}$ の基点集合は $W \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ であり,
- $\varphi^{-1}(W_{\mathrm{T}})$ と $\psi^{-1}(W_{\mathrm{Cusp}})$ はそれぞれ三回ブローアップ p の中心と例外集合であり,
- $\pi_2 \circ \pi_3 \left(\varphi^{-1}(W_{\mathrm{red}})\right) = g^{-1}(W)$ である.

参考文献

[A02] V. Alexeev, *Complete moduli in the presence of semiabelian group action*, Ann. of Math. **155** (2002), 611–708.

[KNU09] K. Kato, C. Nakayama and S. Usui, *Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, I: Borel-Serre spaces*, Advanced Studies in Pure Math. **54**: Algebraic Analysis and Around, 2009, 187-222. MR2499557 (2010g:14010)

[KNU11] K. Kato, C. Nakayama and S. Usui, *Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, II: Spaces of* SL(2)*-orbits*, Kyoto J. Math. **51** (1): Nagata Memorial Issue (2011), 149-261, MR2784750 (2012f:14012)

[KNU13] K. Kato, C. Nakayama and S. Usui, *Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, III: Spaces of nilpotent orbits*, J. Algebraic Geom. **22**, (2013), 671-772,

[Ku] M. Kuroda, *On the GIT moduli of semistable pairs consisting of a plane cubic curve and a line*, doctoral thesis.

[Na99] I. Nakamura, *Stability of degenerate abelian varieties*, Invent. Math. **136** (1999), 659–715.