

Right-angled Artin group のハンドル体群への埋め込みに関して

久野恵理香 (Erika KUNO) (東京工業大学)*

本稿では, $H = H_{g,n}$ を種数 $g \geq 0$, marked point $n \geq 0$ 個付きの連結コンパクト向き付け可能ハンドル体とし, その境界 ∂H を種数 $g \geq 0$, marked point $n \geq 0$ 個付きの連結コンパクト向き付け可能曲面 $S = S_{g,n}$ と見なす.

1. 導入

2012年に Koberda [2] がグラフ Γ が S の曲線グラフ $\mathcal{C}(S)$ の full subgraph であるならば Γ 上の right-angled Artin group $A(\Gamma)$ は S の写像類群 $\text{Mod}(S)$ の部分群になることを示した. 更に 2013年に Kim-Koberda [1] が S の複雑度が 2 以下のとき上記の逆が成り立つ, すなわち $A(\Gamma)$ が $\text{Mod}(S)$ の部分群になるとき Γ は $\mathcal{C}(S)$ の full subgraph になることを示し, S の複雑度が $n \geq 4$ のときに各 n に対してグラフ $\Gamma(n)$ で $A(\Gamma(n))$ は $\text{Mod}(S)$ の部分群になるが $\Gamma(n)$ は $\mathcal{C}(S)$ の full subgraph にならないものを構成した. H のハンドル体群 $\text{Mod}(H)$ は S の写像類群 $\text{Mod}(S)$ の部分群であり, H の円板グラフ $\mathcal{D}(H)$ への作用がある. 本稿では, ハンドル体群と円板グラフに対して同様のことを考え得られた結果について報告する.

2. 準備

2.1. グラフ

本稿ではグラフ Γ とは 1 次元有限単体グラフを指すこととする. $V(\Gamma)$ を Γ の頂点集合, $E(\Gamma)$ を Γ の辺集合とする. 更にグラフはループや多重辺を持たないとする.

定義 2.1. $X \subset V(\Gamma)$ に対し, X による Γ の **full subgraph** または X による誘導部分グラフ Λ とは, Λ の頂点集合を X とし, Λ の辺集合を X 内に両端点を持つ Γ の辺全体として定められたグラフのことである.

Γ の頂点 v の Γ 内の **link** とは v と辺で結ばれる頂点全体の集合のことである. また, n 個の頂点上の完全グラフ K とは K の各頂点が K のその他の全ての頂点と辺で結ばれるグラフである. Γ の誘導部分グラフで完全グラフであるものを **clique** という.

定義 2.2. 正の整数 N に対して Γ が **N -thick stars** を持つとは, Γ の各頂点 v の link が異なる 2 つの $N - 1$ 個の頂点上の clique を含むことである.

2.2. ハンドル体

種数 $g \geq 0$ のハンドル体 H_g とは 3次元球体に g 個の 1-ハンドル $D^2 \times I$ を貼り合わせることで得られる 3次元多様体である. 但し, D^2 は 2次元円板で I は区間である. H_g の境界 ∂H_g は種数 g の連結向き付け可能閉曲面 S_g となる. 種数 $g \geq 0$, marked point $n \geq 0$ 個付きのハンドル体 $H = H_{g,n}$ とは, ∂H_g 上の n 個の点に名前 p_1, p_2, \dots, p_n を付けることで得られる 3次元多様体である. H の境界 ∂H を種数 $g \geq 0$, marked point $n \geq 0$ 個付きの連結コンパクト向き付け可能曲面 $S = S_{g,n}$ と見なす. H 内の円板 d が H に固有に埋め込まれるとは, d の内部は H の内部に, d の境界は H の境界に

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: kuno.e.aa@m.titech.ac.jp

埋め込まれることである。 H 内に固有に埋め込まれた円板 d が本質的であるとは、 d は ∂H 上の円板の境界にならず、かつ ∂H 上の1つの marked point にアイソトピックにならないことである。本稿では円板とは H に固有に埋め込まれた本質的な円板を指すこととする。

定義 2.3. ハンドル体 H 上の **multi-disk** とは H 内の互いに交わらなくアイソトピックでないいくつかの円板の和集合のことである。 H の複雑度を $\xi(H) = \max\{3g-3+n, 0\}$ と定める。これは H 内の multi-disk の成分数の最大に一致する。成分数が $3g-3+n$ である multi-disk を **maximal multi-disk** という (例は図 1)。

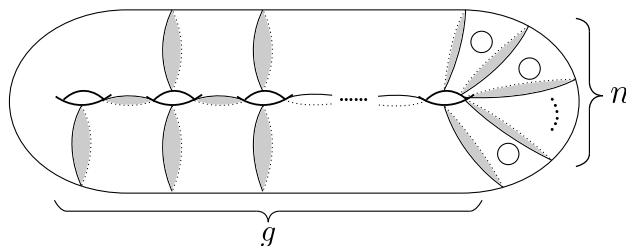


図 1: $H_{g,n}$ 内の maximal multi-disk の例.

S 上の **multi-curve** を定義 2.3 の H 内の円板を S 内の本質的単純閉曲線に変えることで定める。 S の複雑度は $\xi(H) = \max\{3g-3+n, 0\}$ であり H の複雑度と一致する。

定義 2.4. H の円板グラフ $\mathcal{D}(H)$ とは、円板のアイソトピー類を頂点とし、2つの頂点はそれらに対応する円板のアイソトピー類の中で横断的に交わらない代表元の組が選べるときに辺で結ばれると定めることによってできるグラフのことである (例は図 2)。

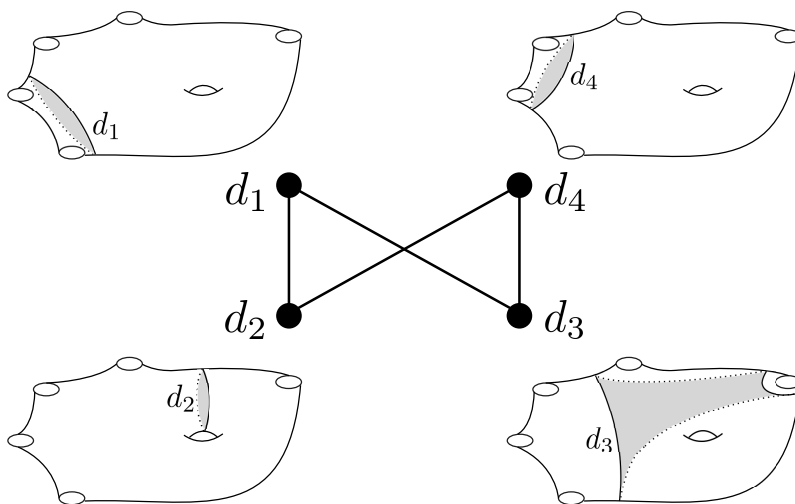


図 2: $H_{1,5}$ の disk graph の例.

S の曲線グラフ $\mathcal{C}(S)$ は定義 2.4 の円板のアイソトピー類を本質的単純閉曲線のアイソトピー類に変えることで定められるグラフである。

定義 2.5. H のハンドル体群 $\text{Mod}(H)$ とは H 上の向きを保つ微分同相写像のアイソトピー類で H 上の marked point の集合を保つもの全体に写像の合成を演算として群構造を入れたものである. H 内の円板 d に沿った **disk twist** δ_d とは d に沿って H を切りその片側を 2π 右に回転させ再び d で H を貼り合わせるという操作で得られる微分同相写像のことである (図 3 を見よ). $\text{Mod}(H)$ の元 ϕ が **multi-disk twist** であるとは, ϕ がいくつかの互いに交わらなくアイソトピックでない円板に沿った disk twist (の累乗) を合成したものを代表元に持つことである.

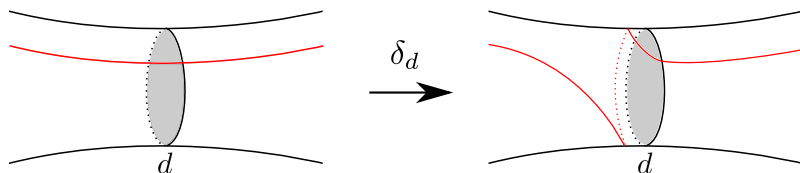


図 3: disk twist の例.

S の写像類群 $\text{Mod}(S)$ は定義 2.5 の H 上の向きを保つ微分同相写像を S 上の向きを保つ微分同相写像に変えることで定義される群である. $\text{Mod}(H)$ は $\text{Mod}(S)$ の部分群になる.

2.3. Right-angled Artin group

定義 2.6. 有限グラフ Γ 上の **right-angled Artin group** $A(\Gamma)$ とは以下の表示から与えられる有限生成群のことである:

$$A(\Gamma) = \langle V(\Gamma) \mid [v_i, v_j] = 1 \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma) \rangle.$$

例 (Right-angled Artin group)

- (1) 図 4 (a) は, $\langle v, w \mid [v, w] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ となる, 但し \mathbb{Z} は整数全体の集合である.
- (2) 図 4 (b) は, $\langle v, w \mid \emptyset \rangle \cong F_2$ となる, 但し F_2 は階数 2 の自由群である.
- (3) 図 4 (c) は, $\langle v, w, x, y \mid [v, x] = [v, y] = [w, x] = [w, y] = 1 \rangle \cong F_2 \times F_2$ となる.
- (4) 図 4 (d) は, $\langle v, w, x, y \mid [v, w] = [x, y] = 1 \rangle \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ となる.

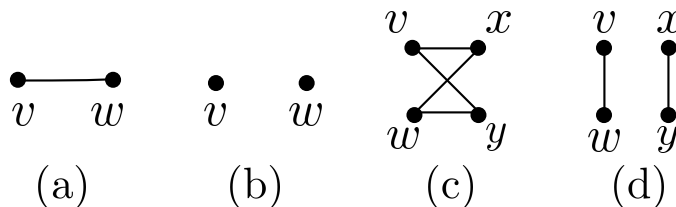


図 4: グラフから right-angled Artin group を定める例.

定義 2.7. $A(\Gamma)$ から $\text{Mod}(H)$ への埋め込み (単射準同型) f が標準的であるとは以下の 2つの条件を満たすことである.

- (i) 写像 f は Γ の各頂点を multi-disk twist にうつす.
- (ii) グラフ Γ の異なる 2つの頂点 u と v に対して, $f(u)$ の support は $f(v)$ の support に含まれない. 但し multi-disk twist の **support** とはその multi-disk twist に含まれる各 disk twist を施す円板の正則近傍の和集合のことである.

3. 主結果

定理 3.1. Γ が $\mathcal{D}(H)$ の誘導部分グラフであるならば $A(\Gamma)$ は $\text{Mod}(H)$ の部分群になる.

定理 3.2. H の複雑度が 0 または 1 であるとする, $A(\Gamma)$ が $\text{Mod}(H)$ の部分群ならば Γ は $\mathcal{D}(H)$ の誘導部分グラフになる. H の複雑度が 2 で $A(\Gamma)$ から $\text{Mod}(H)$ への標準的な埋め込みが存在するとすると Γ は $\mathcal{D}(H)$ の誘導部分グラフになる.

定理 3.3. Γ_0 を図 5 のグラフとする. $H = H_{0,7}, H_{1,5}$ に対して $A(\Gamma_0)$ は $\text{Mod}(H)$ の部分群になるが Γ_0 は $\mathcal{D}(H)$ の誘導部分グラフにならない.

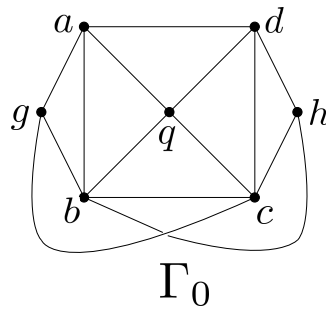


図 5: グラフ Γ_0 .

定理 3.4. H を複雑度が N の任意のハンドル体とする. Γ が N -thick stars を持ち $A(\Gamma)$ から $\text{Mod}(H)$ への標準的な埋め込みが存在するならば Γ は $\mathcal{D}(H)$ の誘導部分グラフになる.

謝辞

研究集会「第 12 回 数学総合若手研究集会」での講演の機会を与えてくださった運営委員の方々には心より感謝申し上げます. また, 日頃から研究に関することで常に背中を押して下さり, 本研究においても丁寧にご指導をして下さった東京工業大学の遠藤久顕先生には感謝してやみません. そして, 奈良女子大学の張娟姫先生と東京理科大学の廣瀬進先生にはハンドル体群や円板グラフに関して大変有益な助言をいただき大きな学びとなりましたことを改めて厚く御礼申し上げます.

参考文献

- [1] S. Kim and T. Koberda, *Right-angled Artin groups and finite subgraphs of curve graphs*, to appear in *Osaka Journal of Mathematics*, available at arXiv:1310.4850v2 [math.GT].
- [2] T. Koberda, *Right-angled Artin groups and a generalized isomorphism problem for finitely generated subgroups of mapping class groups*, *Geom. Funct. Anal.* **22** (2012), no. 6, 1541–1590.