中間畳み込みと接続係数

近内　翔太郎 (Konnai Shotaro)　(神戸大学・理)*

1. 導入

既約な Fuchs 型方程式は, addition と middle convolution と呼ばれる操作を有限回施すことによって「基本型」の Schlesinger 型方程式のクラスに帰着する。これはその逆も成立し, 既約な Fuchs 型は対応する「基本型」の系から addition と middle convolution を有限回繰り返すことで構成できる。一般に, 連立系の middle convolution によってできる Schlesinger 型方程式はゲージ変換による不定性を残して定まっており, 元の方程式からできる方程式の具体的な形を予想することは殆どできない。そのため, 必要な middle convolution の回数が多いほど，方程式を上手く構成することは難しくなってくる。しかし, 扱う対象を大久保型微分方程式に限定すれば，middle convolution による微分方程式の構成や，解の構成をある程度標準化するすることができる．講演ではこのことを紹介し, その接続問題への応用について述べる。

2. 方程式の構成

Schlesinger 型常微分方程式

$$\frac{d}{dx}Y = \sum_{k=1}^{r} \frac{A_k}{x-t_k}Y \quad (A_k \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})) \tag{1}$$

の留数行列の組を $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_r)$ で表す。r 個のパラメータの組 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して,

$$\mathrm{add}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{A}) = (A_1 + a_1, \ldots, A_r + a_r) \tag{2}$$

を $\boldsymbol{A}$ の addition と呼ぶ。$\boldsymbol{A}$ の middle convolution は次のように 3 段階で定義される。

第 1 段階 (畳込み). Schlesinger 型方程式の留数行列の組 $\boldsymbol{A}$ に対し, $nr \times nr$ 行列の組

$$\boldsymbol{B} = (B_1, \ldots, B_r); \quad B_k = \begin{pmatrix} & & O & & \\ A_1 & \cdots & A_k + \mu & \cdots & A_r \\ & & O & & \end{pmatrix} \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{3}$$

と Schlesinger 型方程式 $\frac{d}{dx}Z = \sum_{k=1}^{r} \frac{B_k}{x-t_k}Z$ を対応させる操作を $\mathrm{c}_\mu(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$ で表し, $\boldsymbol{A}$ の畳込みと呼ぶ。

第 2 段階 (K 簡約). 留数行列 A_k $(k = 1, \ldots, r)$ の階数を n_k とする．各 A_k を

$$A_k = P_k Q_k; \quad P_k \in \mathrm{Mat}(n, n_k; \mathbb{C}),\ Q_k \in \mathrm{Mat}(n_k, n; \mathbb{C}) \tag{4}$$

と分解し, ブロック行列 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_r \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(\widetilde{n}, nr; \mathbb{C}) \quad (\widetilde{n} = \sum_{k=1}^{r} n_k) \tag{5}$$

* e-mail: `konnai@math.kobe-u.ac..jp`

で定義すると, $QB_k = \widetilde{B}_k Q$ を満たす $\widetilde{B}_k \in \mathrm{Mat}(\widetilde{n};\mathbb{C})$ が一意に定まる. この $\widetilde{\boldsymbol{B}} = (\widetilde{B}_1,\ldots,\widetilde{B}_r)$ と Schlesinger 型方程式 $\frac{d}{dx}\widetilde{Z} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\widetilde{B}_k}{x-t_k}\widetilde{Z}$ を $\boldsymbol{B}$ の K 簡約と呼ぶ。

第 3 段階 (L 簡約). $\widetilde{B} = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{B}_k$ の階数を $\widehat{n}$ とする. これを 2 つの行列の積

$$\widetilde{B} = P_0 Q_0; \quad P_0 \in \mathrm{Mat}(\widetilde{n},\widehat{n};\mathbb{C}),\ Q_0 \in \mathrm{Mat}(\widehat{n},\widetilde{n};\mathbb{C}) \tag{6}$$

に分解する。このとき $Q_0\widetilde{B}_k = \widehat{B}_k Q_0\ (k=1,\ldots,r)$ を満たす行列の組 $\widehat{\boldsymbol{B}} = (\widehat{B}_1,\ldots,\widehat{B}_r)$ と Schlesinger 型方程式 $\frac{d}{dx}\widehat{Z} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\widehat{B}_k}{x-t_k}\widehat{Z}$ が一意に定まる。この一連の操作を $\mathrm{mc}_\mu(\boldsymbol{A}) = \widehat{\boldsymbol{B}}$ で表し, $\boldsymbol{A}$ の middle convolution と呼ぶ。

以下では $\boldsymbol{A}$ に対応する Schlesinger 型方程式は, 型 $(n_1,\ldots,n_r)$ の大久保型方程式であって, ブロック行列 $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{r}$ を用いて

$$(x-T)\frac{d}{dx}Y = AY; \qquad T = \mathrm{diag}(t_1 I_{n_1},\ldots,t_r I_{n_r}) \tag{7}$$

と表される場合を考える。このとき次の定理が成立する。

定理 1. 大久保型方程式 $(x-T)\frac{d}{dx}Y = AY$ において, 1 個の添字 $k \in \{1,\ldots,r\}$ を選び, $\mathrm{Ker}(A_{kk}+c) = 0$, $\mathrm{Ker}(A_{kk}-\rho) = 0$ と仮定する。このとき

$$\boldsymbol{A}^{mc} = \mathrm{add}_{(0,\ldots,\rho,\ldots,0)} \circ \mathrm{mc}_{-\rho-c} \circ \mathrm{add}_{(0,\ldots,c,\ldots,0)}(\boldsymbol{A}) = (A_1^{mc},\ldots,A_r^{mc}) \tag{8}$$

は, 次の行列 A^{mc} の定める大久保型方程式 $(x-T)\frac{d}{dx}W = A^{mc}W$ と同値である。

$$A^{mc} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & & \\ & A_{ij}-(\rho+c)\delta_{ij} & \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} A_{1k}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} \\ \vdots \\ A_{k-1,k}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} \end{matrix} & \begin{matrix} (\rho+c)\xi_1 \\ \vdots \\ (\rho+c)\xi_{k-1} \end{matrix} & \begin{matrix} & & \\ & A_{ij} & \\ & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_{k1} & \ldots & A_{k,k-1} \\ \eta_1 & \ldots & \eta_{k-1} \end{matrix} & \begin{matrix} A_{kk} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \rho \end{matrix} & \begin{matrix} A_{k,k+1} & \ldots & A_{kr} \\ \eta_{k+1} & \ldots & \eta_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & \\ & A_{ij} & \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} A_{k+1,k}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} \\ \vdots \\ A_{rk}(A_{kk}+c)(A_{kk}-\rho)^{-1} \end{matrix} & \begin{matrix} (\rho+c)\xi_{k+1} \\ \vdots \\ (\rho+c)\xi_r \end{matrix} & \begin{matrix} & & \\ & A_{ij}-(\rho+c)\delta_{ij} & \\ & & \end{matrix} \end{pmatrix} \tag{9}$$

ここで $\xi_i \in \mathrm{Mat}(n_i,n_k;\mathbb{C})$, $\eta_j \in \mathrm{Mat}(n_k,n_j;\mathbb{C})$ は次の関係式を満たすものとする。

$$\xi_i\eta_j = A_{ij} - \rho - A_{ik}(A_{kk}-\rho)^{-1}A_{kj} \quad (i,j=1,\ldots,r, i,j\neq k) \tag{10}$$

ここまでの話は代数的な操作によって Schlesinger 型方程式から新しい Schlesinger 型方程式を作ったにすぎない。しかし, 実際にはこれらの結果は方程式の解にまで議論の対象を拡張することができる。さらに, 大久保型方程式では大久保標準解行列という解行列を利用して接続係数に関する話題に応用することができ, 元の大久保型方程式 (7) の接続係数と定理 1 の大久保型方程式 (9) の接続係数の間の関係式を具体的に記述することが可能である。以下でこのことについて述べる。

3. 大久保標準解行列と接続

以下,$\mathcal{D}=\mathbb{C}\backslash\{t_1,\ldots,t_r\}$ 上の大久保型方程式 (7) の A と A_{kk} の固有値は整数差を持たないとする。このとき,(7) の解として各特異点の周りの挙動を表す

$$\Psi^{(k)}=F^{(k)}(x)(x-t_k)^{A_k},\quad F^{(k)}(x)\in \mathrm{Mat}(n;O_{t_k}),\quad F^{(k)}(t_k)=I_n, \tag{11}$$

という形をした解の基本行列が取れる。この $\Psi^{(k)}(x)$ を

$$\Psi^{(k)}(x)=(\Psi^{(k)}_1,\ldots,\Psi^{(k)}_r),\quad \Psi^{(k)}_j(x)\in \mathrm{Mat}(n,n_j;O(\widetilde{\mathcal{D}})), \tag{12}$$

と分け,$\Psi^{(k)}_k$ を集めた解を

$$\Psi(x)=(\Psi^{(1)}_1,\ldots,\Psi^{(r)}_r) \tag{13}$$

とおき, 大久保標準解行列と呼ぶ。大久保標準解行列は次のようにほぼ一般的な仮定の下で解の基本行列となる。

定理 2. 大久保型方程式 (7) に対し次を仮定する。
(1):ブロック対角要素 A_{kk} $(k=1,\ldots,r)$ の固有値は非整数,
(2):A の固有値は負整数をとらない
(3):A_{kk} $(k=1,\ldots,r)$ と A の固有値は 0 を除く整数差を持たない
このとき大久保標準解行列は解の基本行列。

一般に, 大久保型方程式の解 $\Psi^{(j)}(x)$ と $\Psi^{(k)}_k(x)$ の関係は $x=t_k$ において正則な解を $H^{(k)}_j(x)$ と置くと, 接続係数 C_{kj} を用いて

$$\Psi^{(j)}_j(x)=\Psi^{(k)}_k(x)C_{kj}+H^{(k)}_j(x) \tag{14}$$

と表すことができる。$\gamma_1,\ldots,\gamma_r$ をそれぞれ $x=t_1,\ldots,x=t_r$ の周りを回る $\mathcal{D}$ 上の曲線とし、その大久保標準解行列に対する解析接続が

$$\gamma_k\Psi_(x)=\Psi(x)M_k \tag{15}$$

と表されるとする。すると、(14) から M_k $(k=1,\ldots,r)$ は

$$M_k=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ (e(A_{kk})-1)C_{k1} & \cdots & e(A_{kk}) & \cdots & (e(A_{kk}-1)C_{kr} \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},e(A_{kk})=e^{2\pi iA_{kk}} \tag{16}$$

と簡潔に表示される。

大久保型方程式 (9) の大久保標準解行列を $\Psi^{mc}(x)$, $\gamma_j\Psi^{mc}(x)=\Psi^{mc}(x)M^{mc}_j$ とする。このとき M^{mc}_j は大久保型方程式 (9) の形に合わせて次のように表すことができる。

$$M_j=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ (e(A_{jj}-\rho-c)-1)C^{mc}_{k1} & \cdots & e(A_{jj}) & \cdots & (e(A_{jj}-1)C^{mc}_{kr} \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\qquad (j\neq k) \tag{17}$$

ここで $C_{ik}=(C_{i(k1)},\, C_{i(k2)})$,

$$M_k^{mc}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ (e(A_{kk})-1)C^{mc}_{(k1)1} & \cdots & e(A_{kk}) & 0 & \cdots & (e(A_{kk}-1)C^{mc}_{(k1)r} \\ (e(A_{kk})-1)C^{mc}_{(k2)1} & \cdots & 0 & e(\rho) & \cdots & (e(A_{kk}-1)C^{mc}_{(k2)r} \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

M_k と M_k^{mc} の関係はconvolutionを経由して求めることができる。

$\mathcal{D}_x=\mathbb{C}\backslash\{t_1,\dots,t_r,x\}$ とし,$p_0\in\mathcal{D}_x$ の $\pi^1(\mathcal{D}_x,p_0)$ の生成元 $\alpha_1,\dots,\alpha_r,\alpha_x$ を起点 p_0 とした $u=t_1,\dots,t_r,x$ の周りを回る曲線のホモトピー類とする。このときパラメータ $\mu\in\mathbb{C}$ に対しEuler変換を $nr\times n$ のブロック行列

$$I^{\mu}_{L_k}\Psi(x)=\left(\int_{L_k}(x-u)^{\mu}\Psi(u)\frac{du}{u-t_i}\right)_{i=1}^{r}\quad(k=1,\dots,r) \tag{19}$$

として定める。ここで L_k は u 平面 $\mathcal{D}_x$ 上の積分路で $L_k=L[t_k,x]=\alpha_x^{-1}\alpha_k^{-1}\alpha_x\alpha_k$ で定まる路。convolutionを施した方程式(3)の解はこのEuler変換によって実現することができ、次が成立する。

定理 3. 以下の3つの条件
(i):$\mu\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$
(ii):$A_k(k=1,\dots,r)$ の異なる固有値は整数差を持たない。
(iii):$A_k(k=1,\dots,r)$,$A_\infty-\mu=-(A_1+\ldots+A_r)-\mu$ は $\mathbb{Z}_{>0}$ の固有値を持たない。
の成立を仮定する。このとき

$$I^{\mu}\Psi(x)=\left(I^{\mu}_{L_1}\Psi(x),\dots,I^{\mu}_{L_r}\Psi(x)\right) \tag{20}$$

は *convolution* を施した方程式(3)の解の基本行列。

$I^{\mu}\Psi(x)$ は解の基本行列であるが,実際は殆ど大久保標準解行列と変わらず適当なブロック対角行列を掛けてやることで本当に大久保標準解行列にすることができる。

定理 4.

$$I^{\mu}\Psi(x)R^{-1},\quad R=(R_1,\dots,R_r) \tag{21}$$

は(3)の大久保標準解行列。ここで

$$\begin{aligned} R_i&=\widetilde{B}(A_{ii},-\rho-c+1),\quad(i\neq k)\\ R_k&=\widetilde{B}(A_{kk}+c,-\rho-c+1)\end{aligned} \tag{22}$$

で次で定まる $\widetilde{B}$ は行列値のベータ関数で

$$\widetilde{B}(A,\mu):=(e(A)-1)(e(\mu)-1)\int_0^1 u^{A-1}(1-u)^{\mu-1}du,\quad A\in\mathrm{Mat}(n;\mathbb{C}),\quad \mu\in\mathbb{C}. \tag{23}$$

定理4を利用し、$I^{\mu}\Psi(x)$ を上手く簡約してやることで大久保型方程式(9)の大久保標準解行列が構成され、接続係数の間に成立する漸化式が導出される。

定理 5. (主定理) 大久保型方程式 (7) の接続係数 C_{ij},$(i,j=1,\dots,r)$ と大久保型方程式 (9) の接続係数 C^{mc}_{ij},$(i,j=1,\dots,(k1),\dots,r)$ 間には次の関係式が成立する。

$$C^{mc}_{ij}=\begin{cases}\left(\dfrac{t_i-t_k}{t_j-t_k}\right)^{\rho+c}\dfrac{e(\frac{-1}{2}(\rho+c))\Gamma(\rho+c-A_{ii})}{\Gamma(-A_{ii})}C_{ij}\dfrac{\Gamma(A_{jj}-\rho-c+1)}{\Gamma(A_{jj}+1)} & (j<i;\ i,j\neq k)\\ \left(\dfrac{t_i-t_k}{t_j-t_k}\right)^{\rho+c}\dfrac{e(\frac{1}{2}(\rho+c))\Gamma(\rho+c-A_{ii})}{\Gamma(-A_{ii})}C_{ij}\dfrac{\Gamma(A_{jj}-\rho-c+1)}{\Gamma(A_{jj}+1)} & (i<j;\ i,j\neq k),\end{cases}\tag{24}$$

$$C^{mc}_{i(k1)}=\begin{cases}(t_i-t_k)^{\rho+c}e(\frac{1}{2}(\rho+c))\dfrac{\Gamma(\rho+c-A_{ii})}{\Gamma(-A_{ii})}C_{ik}\dfrac{\Gamma(A_{kk}-\rho)}{\Gamma(A_{kk}+c)} & (i<k)\\ (t_i-t_k)^{\rho+c}e(\frac{-1}{2}(\rho+c))\dfrac{\Gamma(\rho+c-A_{ii})}{\Gamma(-A_{ii})}C_{ik}\dfrac{\Gamma(A_{kk}-\rho)}{\Gamma(A_{kk}+c)} & (k<i)\end{cases}\tag{25}$$

$$C^{mc}_{(k1)j}=\begin{cases}-e(\frac{-1}{2}(\rho+c))(t_j-t_k)^{-\rho-c}\dfrac{\Gamma(1+\rho-A_{kk})}{\Gamma(1-A_{kk}-c)}C_{kj}\dfrac{\Gamma(A_{jj}-\rho-c+1)}{\Gamma(A_{jj}+1)} & (j<k)\\ -e(\frac{1}{2}(\rho+c))(t_j-t_k)^{-\rho-c}\dfrac{\Gamma(1+\rho-A_{kk})}{\Gamma(1-A_{kk}-c)}C_{kj}\dfrac{\Gamma(A_{jj}-\rho-c+1)}{\Gamma(A_{jj}+1)} & (k<j)\end{cases}\tag{26}$$

参考文献

[1] N.M. Katz: *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, Princeton, 1996.

[2] K. Okubo: *On the Group of Fuchsian Equations*, Seminar Reports of Tokyo Metropolitan University, 1987.

[3] M. Dettweiler and S. Reitter: Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, J. Algebra **318** (2007), 1–24.

[4] S. Konnai. Connection coefficients and monodromy representations for a class of Okubo systems of ordinary differential equations (in preparation)