Regular multiplicity ergodic actions of compact quantum groups

北川 めぐみ (Megumi KITAGAWA)
お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻

1　コンパクト量子群

Woronowicz によるコンパクト量子群とは、単位的 C^* 環 A と、余積と呼ばれる A から A 同士の minimal テンソル積への単位的*準同型写像 $\Delta\colon A \to A \otimes A$ の組 (A, Δ) で

- (1) $(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta$
- (2) $(A \otimes 1)\Delta(A) = span\{(a \otimes 1)\Delta(b)\colon a, b \in A\}, (1 \otimes A)\Delta(A) = span\{(1 \otimes a)\Delta(b)\colon a, b \in A\}$ はそれぞれ $A \otimes A$ で稠密

をみたすもののことである。A をコンパクト量子群 G 上の関数環とみなして $C(G)$ とも書く。A が可換 C^* 環のときは実際にコンパクト量子群は、普通の意味でのコンパクト群 G に関して $(C(G), \Delta)$ の形をしている。

コンパクト量子群には、Haar 状態と呼ばれる状態 $h\colon C(G) \to \mathbb{C}$ がただひとつ存在する。この h は、$a \in C(G)$ に対し

$$(\iota \otimes h)\Delta(a) = (h \otimes \iota)\Delta(a) = h(a) \cdot 1$$

をみたす。

コンパクト量子群 G の、Hilbert 空間 H 上のユニタリ表現とは、multiplier 環 $M(K(H) \otimes C(G))$ のユニタリ U で、$(\iota \otimes \Delta)(U) = U_{12}U_{13}$ を満たすもののことである。$L^2(G)$ で、Haar 状態 h から定まる $C(G)$ の GNS 表現を表す。 $a \in C(G)$ に対して $\Lambda(a)$ と書いて $L^2(G)$ のベクトルとみなす。$C(G) \subset B(H_0)$ となっているとき、$a \in C(G), \xi \in H_0$ に対して $W(\Lambda(a) \otimes \xi) = \Delta(a)(\Lambda(1) \otimes \xi)$ によって定まる G の $L^2(G)$ 上の右正則表現 W がただひとつある。

2　Regular multiplicity ergodic actions

コンパクト量子群 G の離散双対量子群を $\hat{G}$ と書く。G の、von Neumann 環 M へのエルゴード作用とは、不動点環がスカラーのみからなるようなもののことである。α をエルゴード作用とするとき、次の条件は同値である。

- G の既約表現 $\pi \in \hat{G}$ に対して、スペクトル部分空間 M_π の重複度は $dim\pi$ となる。
- 任意の既約表現 $\pi \in \hat{G}$ は M 内にユニタリ固有行列をもつ。
- W^* crossed product は (I 型) 因子である。
- C^* crossed product は Hilbert 空間上のコンパクト作用素からなる C^* 環と同型である。

このことから、G の regular multiplicity ergodic action の分類を $\hat{G}$ のコサイクルの言葉で行うことができる。

3　$\hat{G}$ のコサイクル

ρ を G の右正則表現として、$R(G)$ を $\rho(G)$ で生成される von Neumann 環とする。G が普通のコンパクト群の場合には $R(G)$ 上の余積 $\delta_G: R(G) \to R(G) \otimes R(G)$ は $\delta_G(\rho(g) = \rho(g) \otimes \rho(g)$ を拡張して得られる。($R(G) \otimes R(G)$ は $R(G)$ 同士の von Neumann 環のテンソル積を表す。) ユニタリ $\omega \in R(G) \otimes R(G)$ で、コサイクル条件式

$$(\delta_G \otimes \iota(\omega))(\omega \otimes 1) = (\iota \otimes \delta_G(\omega))(1 \otimes \omega)$$

をみたすものを $\hat{G}$ のコサイクルという。ふたつのコサイクル ω, ω' が cohomologous とは、ユニタリ $\nu \in R(G)$ が存在して、$\omega' = \delta_G(\nu^*)\omega(\nu \otimes \nu)$ となることであり、この同値関係による同値類の集合を $H^2(\hat{G})$ と書く。

$\hat{G}$ のコサイクル ω に対して、$\alpha_g = Ad\lambda(g)$ とおく。λ は G の $L^2(G)$ 上の左正則表現を表す。するとこれは、$\hat{G}$ の正則 ω 表現の bicommutant への、G の full multiplicity ergodic action を定める。更に、G のすべての full multiplicity ergodic action はこのようにして引き起こされ、そのときのコサイクルは一意的に定まる。したがって、full multiplicity ergodic action の同値類と $H^2(\hat{G})$ との間に自然な対応を考えられる。

4　コサイクル表現に対する L^1 環と C^* 環

$C^*_\omega(\hat{G})$ を、L^1 環の enveloping C^* 環として定める。

まず $L^1_\omega(\hat{G})$ を $R(G)_*$ つまり $R(G)$ の predual で、通常の Banach 空間の構造を持つが積は $\langle \phi \circ \psi, x\rangle = \langle \phi \otimes \psi, \delta_G(x)\omega\rangle$ ($\phi, \psi \in R(G)_*, x \in R(G)$) で与えられ、対合は $\phi^\dagger = \alpha\phi^*$ で与えられるものとする。すると、$L^1_\omega(\hat{G})$ は単位的 Banach $*$ 環となる。

$L^1_\omega(\hat{G})$ の $*$ 表現と、$\hat{G}$ の ω 表現との関係について、次の結果が得られる。ω を $\hat{G}$ の正規化されたコサイクルとするとき、$\phi \in L^1_\omega(\hat{G}), \xi \in B(H)_*$ に対して

$$\langle \pi(\phi), \xi\rangle = \langle W, \xi \otimes \phi\rangle$$

という関係によって、$L^1_\omega(\hat{G})$ の unital $*$ 表現と、$\hat{G}$ の H への ω 表現との 1 対 1 対応ができる。このことの証明で肝心なのは、$\hat{G}$ の正則 ω 表現と $L^1_\omega(\hat{G})$ 上の canonical trace との関係を GNS 構

成を使って調べることである。G の $L^1_\omega(\hat{G})$ への作用についての一般的な事実から、$L^1_\omega(\hat{G})$ 上の忠実な trace Tr が定義されることがわかる。

π_ω を Tr に対して GNS 構成を適用することで得られる $L^1_\omega(\hat{G})$ の表現とする。この π_ω は自然に Hilbert 空間 $L^2(G)$ 上に実現できる。すると、$\hat{G}$ の $L^2(G)$ 上の正則 ω 表現と、$\langle \pi_\omega(\phi), \xi\rangle = \langle W, \xi \otimes \phi\rangle$ によって対応する $L^1_\omega(\hat{G})$ の $L^2(G)$ への表現 π_ω は、G の $B(L^2(G))$ への作用 $Ad\lambda(g)$ に対して同変な表現であり、さらに Tr は $L^2(G)$ における定数関数 1 から定まる行列係数であることから、π_ω は $L^1_\omega(\hat{G})$ の忠実な表現となる。

G が通常のコンパクト群の場合、このようにして得られた $L^1_\omega(\hat{G})$ の情報から、コサイクル ω と $\sigma\omega$ との関係について、以下のことがわかる。コサイクル ω に関する次の条件は同値である。

- ω は対称的、つまり $\sigma\omega = \omega$
- ω は自明
- $L^1_\omega(\hat{G})$ は可換
- $\pi_\omega(\hat{G})''$ は可換

そして、$\pi_\omega(\hat{G})''$ と $\pi_{\sigma\omega}(\hat{G})''$ は $B(L^2(G))$ において互いに commutant になっている。

最後に $L^1_\omega(\hat{G})$ の enveloping C^* 環 $C^*_\omega(\hat{G})$ の性質をまとめる。

- G の $L^1_\omega(\hat{G})$ への作用は、$C^*_\omega(\hat{G})$ 上の強連続な作用に拡張される。
- 正則表現 pi_ω は $C^*_\omega(\hat{G})$ 上で忠実であり、$C^*_\omega(\hat{G})$ は $\pi_\omega(\hat{G})''$ のノルムについて連続な C^* 環となる。
- $C^*_\omega(\hat{G}) \rtimes G = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ はコンパクト作用素のなす環を表す。)
- $C^*_\omega(\hat{G})$ は核型な C^* 環である。一般の量子群 G の場合には G が余従順性をみたすとき $C^*_\omega(\hat{G})$ は核型となる。

5 例

$G = SU(2)$ の場合、$\alpha\colon SU(2) \to Aut(M)$ を、$SU(2)$ の既約表現 π のコピーが少なくとも 1 つ含まれるようなエルゴード作用とすると、$M \simeq L^\infty(G)$ がわかる。つまり $SU(2)$ は非自明な full multiplicity ergodic action をもたない。このことは、π に対して $\alpha_g(M) = M\pi(g)$ となるユニタリ固有行列 M が、$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ となることから議論できる。

$G = SU(3)$ や $G = SU(2) \times SU(2)$ の場合、そのすべての full multiplicity ergodic action は、極大トーラスから誘導される。

参考文献

[NT11] Sergey Neshveyev and Lars Tuset, *On second cohomology of duals of compact groups*, Internat. J. Math. **22** (2011), no. 9, 1231–1260.

[NT13] Sergey Neshveyev and Lars Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 20, Société Mathématique de France, Paris, 2013.

[Tom08] Reiji Tomatsu, *Compact quantum ergodic systems*, J. Funct. Anal. **254** (2008), no. 1, 1–83.

[Was88a] Antony Wassermann, *Ergodic actions of compact groups on operator algebras. II. Classification of full multiplicity ergodic actions*, Canad. J. Math. **40** (1988), no. 6, 1482–1527.

[Was88b] Antony Wassermann, *Coactions and Yang-Baxter equations for ergodic actions and subfactors*, Operator algebras and applications, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 136, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, pp. 203–236.