多重ゼータスター値のq-類似の積分表示について

川崎菜穂 *
(KAWASAKI Naho)

概 要

多重ゼータ値 (multiple zeta value,MZV) には Drinfel'd 積分を用いた反復積分表示がよく知られているが，最近，それとは別の積分表示が山本氏によって導入された．この山本氏による積分表示は MZV の q-類似である q-MZV への拡張可能であることがわかったので，そのことについて紹介する．それは従来から知られている Jackson q-積分を用いた積分表示とは形が異なるものになっている．

1 q-多重ゼータ値

1.1 MZSV とその積分表示

MZV には Drinfel'd 積分表示がよく知られているが, 最近, それを拡張した積分表示が山本氏によって導入された ([3]). まずそれを紹介する.

Definition 1.1. 正の整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$, ただし $k_1 \geq 2$, に対して, 多重ゼータスター値 (MZSV) を収束級数

$$\zeta^\star(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n > 0} \frac{1}{{m_1}^{k_1} {m_2}^{k_2} \cdots {m_n}^{k_n}}$$

で定義する. そして, MZV と同様に, 引数の和 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n =: k$ を weight, 引数の個数 n を depth と呼ぶ.

Theorem 1.1 (山本 [3])**.** インデックス $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ に対し,

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}) &= \{0, k_1, k_1 + k_2, \ldots, k_1 + \cdots + k_{n-1}\}, \\ D^\star(\mathbf{k}) &= \left\{ (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in [0,1]^k \;\middle|\; \begin{array}{l} t_j < t_{j+1} \ (j \notin J(\mathbf{k}),\ 1 \leq j < k), \\ t_j > t_{j+1} \ (j \in J(\mathbf{k}),\ 1 \leq j < k) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

*京都産業大学大学院理学研究科修士課程 2 年

とする．このとき，

$$\zeta^\star(\mathbf{k}) = \int_{D^\star(\mathbf{k})} \omega_{\delta(1)}(t_1)\omega_{\delta(2)}(t_2)\cdots\omega_{\delta(k)}(t_k) \qquad (k_1 \geq 2)$$

が成り立つ．ただし，

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t},\ \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t},$$

そして，

$$\delta(j) = \begin{cases} 0 \ (j-1 \notin J(\mathbf{k}),\ 1 \leq j \leq k), \\ 1 \ (j-1 \in J(\mathbf{k}),\ 1 \leq j \leq k) \end{cases}$$

とする．

Example 1.1. $\mathbf{k} = (2,1,2)$ のとき，

$$\zeta^\star(2,1,2) = \int_{t_1<t_2>t_3>t_4<t_5} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{t_5}$$

となる．実際に右辺を計算すると，

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} &= \sum_{m\geq 1}\int_0^{t_2} {t_1}^{m-1}dt_1 = \sum_{m\geq 1}\frac{{t_2}^m}{m}\ , \\
\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}\int_{t_3}^1 {t_2}^{m-1}dt_2 &= \sum_{m\geq 1}\frac{1-{t_3}^m}{m^2}\ , \\
\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2}\int_{t_4}^1 \frac{1-{t_3}^m}{1-t_3}dt_3 &= \sum_{m\geq n\geq 1}\frac{1-{t_4}^n}{m^2 n}\ , \\
\sum_{m\geq n\geq 1}\frac{1}{m^2 n}\int_0^{t_5} \frac{1-{t_4}^n}{1-t_4}dt_4 &= \sum_{m\geq n\geq l\geq 1}\frac{{t_5}^l}{m^2 nl}\ , \\
\sum_{m\geq n\geq l\geq 1}\frac{1}{m^2 nl}\int_0^1 {t_5}^{l-1}dt_5 &= \sum_{m\geq n\geq l\geq 1}\frac{1}{m^2 nl^2} \ = \ \zeta^\star(2,1,2)
\end{aligned}$$

を得る．

1.2 q-MZSV とその積分表示

今回，この山本氏による積分表示の q-MZV への拡張を得た．これは従来から知られている Jackson q-積分を用いた積分表示とは形が異なるものになっている．

自然数 n に対して，q-integer $[n]$ を

$$[n] = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (|q|<1)$$

と定義する．

Definition 1.2. 正の整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$, ただし $k_1 \geq 2$, $|q| < 1$, に対して, q-多重ゼータスター値 (q-MZSV) を収束級数

$$\zeta_q^\star(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n > 0} \frac{q^{(k_1-1)m_1 + (k_2-1)m_2 + \cdots + (k_n-1)m_n}}{[m_1]^{k_1}[m_2]^{k_2}\cdots[m_n]^{k_n}}$$

で定義する.

q-MZSV において, $q \to 1$ とすると, MZSV を得ることができる.

Definition 1.3. Jackson q-積分を

$$\int_0^a f(t) d_q t = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} a q^n f(a q^n) \qquad (a \geq 0)$$

と定義する. そして, 任意の正の数 $a, b (b \geq a \geq 0)$ に対して,

$$\int_a^b f(t) d_q t = \left(\int_0^b - \int_0^a \right) f(t) d_q t$$

と定義する.

今回, 山本氏の結果である定理 1.1 ([3]) を q-類似に拡張したものを得ることができたので, それを紹介する.

Theorem 1.2. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ に対し,

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}) &= \{0, k_1, k_1 + k_2, \ldots, k_1 + \cdots + k_{n-1}\}, \\ D_q^\star(\mathbf{k}) &= \left\{ (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in [0,1]^k \;\middle|\; \begin{array}{l} t_j < q t_{j+1} \ (j \notin J(\mathbf{k}),\ 1 \leq j < k), \\ t_j > t_{j+1} \ (j \in J(\mathbf{k}),\ 1 \leq j < k) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

とする. このとき,

$$\zeta_q^\star(\mathbf{k}) = \int_{D_q^\star(\mathbf{k})} \omega_{q,\delta(1)}(t_1)\omega_{q,\delta(2)}(t_2)\cdots\omega_{q,\delta(k)}(t_k) \qquad (k_1 \geq 2)$$

が成り立つ. ただし,

$$\omega_{q,0}(t) = \frac{d_q t}{t},\ \omega_{q,1}(t) = \frac{d_q t}{1-t},$$

そして,

$$\delta(j) = \begin{cases} 0 \ (j-1 \notin J(\mathbf{k}),\ 1 \leq j \leq k), \\ 1 \ (j-1 \in J(\mathbf{k}),\ 1 \leq j \leq k) \end{cases}$$

とする.

Example 1.2. $\mathbf{k}=(2,1,3)$ のとき，$J(2,1,3)=\{0,2,3\}$ より，

$$D_q^\star(2,1,3)=\left\{(t_1,t_2,\ldots,t_6)\in[0,1]^k \;\middle|\; \begin{array}{l} t_1<qt_2, t_2>t_3, t_3>t_4, \\ t_4<qt_5, t_5<qt_6 \end{array}\right\},$$
$$\delta(1)=1,\ \delta(2)=0,\ \delta(3)=1,\ \delta(4)=1,\ \delta(5)=0,\ \delta(6)=0$$

となる．したがって，

$$\zeta_q^\star(2,1,3)=\int_0^1\frac{d_qt_6}{t_6}\int_0^{qt_6}\frac{d_qt_5}{t_5}\int_0^{qt_5}\frac{d_qt_4}{1-t_4}\int_{t_4}^1\frac{d_qt_3}{1-t_3}\int_{t_3}^1\frac{d_qt_2}{t_2}\int_0^{qt_2}\frac{d_qt_1}{1-t_1}$$

となる．実際に右辺を計算すると，

$$\int_0^{qt_2}\frac{d_qt_1}{1-t_1}=\sum_{m=1}^\infty\int_0^{qt_2}{t_1}^{m-1}d_qt_1=\sum_{m=1}^\infty\frac{(qt_2)^m}{[m]}$$

となる．次に，

$$\sum_{m=1}^\infty\frac{q^m}{[m]}\int_{t_3}^1{t_2}^{m-1}d_qt_2=\sum_{m=1}^\infty\frac{q^m}{[m]}\left(\int_0^1{t_2}^{m-1}d_qt_2-\int_0^{t_3}{t_2}^{m-1}d_qt_2\right)$$

であるので，

$$\sum_{m=1}^\infty\frac{q^m}{[m]}\int_{t_3}^1{t_2}^{m-1}d_qt_2=\sum_{m=1}^\infty\frac{q^m}{[m]^2}(1-{t_3}^m)$$

となる．同様に計算していくと，

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^\infty\frac{q^m}{[m]^2}\int_{t_4}^1\frac{1-{t_3}^m}{1-t_3}d_qt_3 &= \sum_{m=1}^\infty\frac{q^m}{[m]^2}\int_{t_4}^1\sum_{n=1}^m{t_3}^{n-1}d_qt_3 \\
&= \sum_{m\ge n\ge 1}\frac{q^m}{[m]^2}\left(\frac{1}{[n]}-\frac{{t_4}^n}{[n]}\right), \\
\sum_{m\ge n\ge 1}\frac{q^m}{[m]^2[n]}\int_0^{qt_5}\frac{1-{t_4}^n}{1-t_4}d_qt_4 &= \sum_{m\ge n\ge 1}\frac{q^m}{[m]^2[n]}\int_0^{qt_5}\sum_{l=1}^n{t_4}^{l-1}d_qt_4 \\
&= \sum_{m\ge n\ge l\ge 1}\frac{q^m(qt_5)^l}{[m]^2[n][l]}, \\
\sum_{m\ge n\ge l\ge 1}\frac{q^mq^l}{[m]^2[n][l]}\int_0^{qt_6}{t_5}^{l-1}d_qt_5 &= \sum_{m\ge n\ge l\ge 1}\frac{q^mq^l(qt_6)^l}{[m]^2[n][l]^2}, \\
\sum_{m\ge n\ge l\ge 1}\frac{q^mq^{2l}}{[m]^2[n][l]^2}\int_0^1{t_6}^{l-1}d_qt_6 &= \sum_{m\ge n\ge l\ge 1}\frac{q^mq^{2l}}{[m]^2[n][l]^3} = \zeta_q^\star(2,1,3)
\end{aligned}$$

を得る．

1.3 q-MZV とその積分表示

前節と同様の手法により, q-MZV の積分表示を得ることができる.

Definition 1.4. 正の整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$, ただし $k_1 \geq 2$, $|q| < 1$ に対して, q-多重ゼータ値 (q-MZV) を収束級数

$$\zeta_q(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{q^{(k_1-1)m_1 + (k_2-1)m_2 + \cdots + (k_n-1)m_n}}{[m_1]^{k_1}[m_2]^{k_2} \cdots [m_n]^{k_n}}$$

で定義する.

q-MZSV の場合と同様に, q-MZV において, $q \to 1$ とすると, MZV を得ることができる. 定理 1.2 において, $D_q^\star(\mathbf{k})$ を

$$D_q(\mathbf{k}) \quad = \quad \left\{ (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in [0,1]^k \;\middle|\; \begin{array}{l} t_j < qt_{j+1} \ (j \notin J(\mathbf{k}),\ 1 \geq j < k), \\ t_j < t_{j+1} \ (j \in J(\mathbf{k}),\ 1 \geq j < k) \end{array} \right\}$$

に置き換えると, 次の定理が得られる.

Theorem 1.3. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ に対し, $\tilde{\mathbf{k}} = (k_n, k_{n-1}, \ldots, k_1)$ とおくと, q-MZV の積分表示

$$\zeta_q(\mathbf{k}) = \int_{D_q(\tilde{\mathbf{k}})} \omega_{q,\delta(1)}(t_1)\omega_{q,\delta(2)}(t_2) \cdots \omega_{q,\delta(k)}(t_k) \qquad (k_1 \geq 2)$$

が成り立つ.

この積分表示は Bradley [1] での q-MZV の積分表示と関係がつくと思われるが, 現時点では未解決である.

Example 1.3. $\mathbf{k} = (2,1)$ のとき,

$$\zeta_q(2,1) \quad = \quad \int_{t_1 < t_2 < qt_3} \frac{d_q t_1}{1 - t_1} \frac{d_q t_2}{1 - t_2} \frac{d_q t_3}{t_3}$$

となる. 実際に右辺を計算すると,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_2} \frac{d_q t_1}{1 - t_1} \quad &= \quad \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{t_2} {t_1}^{m-1} d_q t_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} {t_2}^m \ , \\
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \int_0^{qt_3} \frac{{t_2}^m}{1 - t_2} d_q t_2 \quad &= \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{qt_3} {t_2}^{m+n-1} d_q t_2 \\
&= \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{m+n}}{[m+n]} {t_3}^{m+n} \ , \\
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{m+n}}{[m+n]} \int_0^1 {t_3}^{m+n-1} d_q t_3 \quad &= \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{m+n}}{[m+n]^2} \ = \ \zeta_q(2,1)
\end{aligned}$$

を得る.

参考文献

[1] David M. Bradley, Multiple q-zeta values, J. Algebra, 283(2)752-798, 2005.

[2] J. Okuda and Y.Takeyama, On relations for the q-multiple zeta values, preprint, 2005, arXiv:math.QA/0402152.

[3] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, preprint, 2014, arXiv:math.NT/1405.6499.