定常輸送方程式の解の正則性と
その拡散光トモグラフィへの応用

川越 大輔
Kawagoe Daisuke *

京都大学大学院情報学研究科

1 研究の背景

非侵襲的な医用生体イメージング技術として, 拡散光トモグラフィが注目されている. 拡散光トモグラフィでは, 約 650nm〜約 900nm の波長をもった近赤外光が用いられる. この波長範囲の近赤外光は, 酸素と結びついたヘモグロビン (以下, 酸素化ヘモグロビンと呼ぶ) に吸収されやすく, それ以外の生体組織には吸収されにくい, という光学特性を持つ. この波長範囲は分光学的窓と呼ばれる. 拡散光トモグラフィとは, 近赤外光のもつこの光学特性を利用して, 生体に照射する光と生体を透過する光を観測することで, 生体内部の酸素化ヘモグロビンの濃度分布を測定する技術である. 「生体内で活発に活動している部位ほど酸素化ヘモグロビンの濃度が高い」という仮定に立てば, 脳に拡散光トモグラフィを適用することで, 脳の機能を解明することができると考えられる.

我々は X 線 CT や MRI 等の生体イメージング技術を獲得しており, これらの技術を脳の活動観測に使うこともできるが, 長時間にわたる X 線や強磁場の照射は, 脳への悪影響が懸念されるため, 積極的にこれらの技術を用いることはできない. 一方, これらの技術と比較して, 拡散光トモグラフィはより安全に長期的な観測を行うことができる. この安全性の利点から, 拡散光トモグラフィの実現が期待されている.

本研究の最終目的は, 数学解析および数値解析の立場から, 拡散光トモグラフィのより高精度で信頼できるアルゴリズムを提案することである.

ここでまず, 生体内の光の伝播の数理モデルを考える. 光には粒子の性質と波動の性質を持つことが知られているが, ここでは粒子の性質に着目する. 生体内の光子の伝播は, 生体による光子の吸収と散乱によって特徴づけられる. これらの特徴を記述したのが, 以下の微分積分方程式である.

$$\begin{aligned}
&-\xi \cdot \nabla I(x,\xi) - (\mu_a(x) + \mu_s(x)) I(x,\xi) \\
&\qquad + \mu_s(x) \int_{S^{n-1}} p(x,\xi,\xi') I(x,\xi')\, d\sigma_{\xi'} = 0, \quad (x,\xi) \in \Omega \times S^{n-1}. \quad (1)
\end{aligned}$$

この方程式を定常輸送方程式 (stationary transport equation) と呼ぶ.

以下, この方程式に現れる記号の意味を解説する. Ω は $\mathbb{R}^n$ 内の凸開集合で, $\partial\Omega$ は C^1 級の滑らかさを持つものとする. また, S^{n-1} は $\mathbb{R}^n$ の単位球面を表す. $I(x,\xi)$ は進行方向が ξ の光子の, 位置 x における密度を表す. $\mu_a(x)$ は位置 x において光子が媒質に吸収される割合を表しており,

*d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp

吸収係数 (absorption coefficient) と呼ばれる．$\mu_s(x)$ は位置 x において光子が媒質により散乱する割合を表しており, 散乱係数 (scattering coefficient) と呼ばれる．$p(x,\xi,\xi')$ は位置 x において進行方向 ξ' をもつ光子がその進行方向を ξ に変える確率を表し, 散乱位相関数 (scattering phase function) と呼ばれる．最後に, $\cdot$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積を, $d\sigma_{\xi'}$ は S^{n-1} 上の体積要素をそれぞれ表す．

物理的な要請から, μ_a, μ_s, p に対して次が仮定される．

- $0 \le \mu_a(x) < \infty, 0 \le \mu_s(x) < \infty, \quad x \in \Omega.$
- $p(x,\xi,\xi') = p(x,\xi',\xi), \quad x \in \Omega, \quad \xi,\xi' \in S^{n-1}.$
- $p(x,\xi,\xi') > 0, \quad \int_{S^{n-1}} p(x,\xi,\xi')\,d\sigma_{\xi'} = 1, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in S^{n-1}.$

拡散光トモグラフィは, “観測できるデータ” から定常輸送方程式の吸収係数 μ_a を決定する逆問題と考えることができる．“観測できるデータ” を数学的に定義するため, 定常輸送方程式に付帯される境界条件について述べる．領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ と 進行方向 S^{n-1} の直積空間 $\partial\Omega \times S^{n-1}$ を次の 3 つに分解する．

$$
\begin{aligned}
\Gamma_+ &:= \left\{(x,\xi) \in \partial\Omega \times S^{n-1} | n(x)\cdot\xi > 0\right\},\\
\Gamma_- &:= \left\{(x,\xi) \in \partial\Omega \times S^{n-1} | n(x)\cdot\xi < 0\right\},\\
\Gamma_0 &:= \left\{(x,\xi) \in \partial\Omega \times S^{n-1} | n(x)\cdot\xi = 0\right\}.
\end{aligned}
$$

ただし, $n(x)$ は点 x における $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである．物理的に言えば, Γ_+ の元は領域内で進行方向 ξ をもつ光子が透過して外に出る位置 x を, Γ_- の元は進行方向 ξ をもつ光子を照射したときに光子が領域内に入る位置 x を, それぞれ表す．そこで, 次の境界条件を課す:

$$
I(x,\xi) = I_0(x,\xi), \quad (x,\xi) \in \Gamma_-. \tag{2}
$$

我々は領域に入射する光と領域を透過する光の 2 つのみ観測することができる．そこで, 上で述べた ” 観測できるデータ” とは, 解 I の $\Gamma_\pm$ 上の値とする．まとめると, 拡散光トモグラフィは, 定常輸送方程式の解の $\Gamma_\pm$ 上の値から係数 μ_a を決定する逆問題であると考えることができる．

Choulli and Stefanov は係数の数学的再構成法を [2] で提案しているが, この方法を現実に行うには無限回の観測が必要なので, ほとんど不可能である．そこでこの逆問題は, 数値計算を用いて次のように解かれるのが慣例的である．

1. μ_a, μ_s, p を推定する．
2. 定常輸送方程式を数値的に解く．
3. 数値計算結果を実験データと比較する．
4. 数値計算結果と実験データとの差が小さくなるように, μ_a, μ_s, p を再構成する．

以下この手順を, 実験データとの差が十分小さくなるまで繰り返す．この方法で係数 μ_a を求める場合, 重要になってくるのは数値計算の “信頼性” である．

A. D. Klose et al. は, 有限差分を利用した数値計算法を [3] で提案している．この数値計算法の” 正当性”(数値解は一意に存在するか, 数値解は差分パラメータを 0 に近づけたときに厳密解に収束するか, 境界値が近い 2 つの数値解は, その差が小さいか) は, Ω が長方形の場合 ($n = 2$) については藤原 [4] によって数学的に証明されている．藤原はその証明の中で厳密解が x と ξ について C^2 級であることを要請しているが, 実際に厳密解が C^2 級であるかどうかは数学的に非自明である．そこで,「どのような仮定の下で C^2 級の厳密解が存在するか.」という問いに答えることを目的として研究に取り組んでいる．本稿では, 現段階で得られている結果について紹介する．

2　問題設定

長方形領域は角をもつため, 解の正則性を議論するのは困難である．そこで, 本研究ではまず 2 次元の帯領域で解の正則性を議論することとする．すなわち, $\Omega = \mathbb{R} \times (0,1)$,

$$\Gamma_- := \{(x_1, 0, \xi) | x_1 \in \mathbb{R}, \, \theta \in (0, \pi)\} \cup \{(x_1, 1, \xi) | x_1 \in \mathbb{R}, \, \theta \in (-\pi, 0)\}$$

である．ただし, θ は $\xi = (\cos\theta, \sin\theta)$ を満たす $(-\pi, \pi]$ の元であり, 以下この関係により S^1 と $(-\pi, \pi]$ を同一視する．

簡単のため, μ_a および μ_s は非負の定数, p は $S^1 \times S^1$ 上の連続関数で, x に依存しないと仮定する．

主結果を述べるために, 記号をいくつか導入する．$C_b\left((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-\right)$ を $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上の有界連続関数全体からなるベクトル空間とする．このとき, $C_b\left((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-\right)$ は

$$\|I\|_\infty := \sup_{(x,\xi) \in (\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} |I(x, \xi)|$$

で定義されるノルム $\|\cdot\|_\infty$ により Banach 空間となる．同様に, $C_b(\Gamma_-)$ で Γ_- 上の有界連続関数全体からなるベクトル空間を表すことにする．

3　主結果

以上の設定の下, 次の定理が証明できる．

定理 1 $I_0 \in C_b(\Gamma_-)$, $\frac{\partial I_0}{\partial x_1} \in C_b(\Gamma_-)$ かつ $\mu_a > 0$ と仮定する．このとき, 境界値問題 (1) - (2) はただ 1 つの古典解 I をもつ．

4　準備

ここで, 定常輸送方程式の解析に必要な考え方を紹介する．

まず, 次の常微分方程式を考える．

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ここで, $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ であり, x は 区間 $[0, T]$ 上の実数値 C^1 級関数, f は $[0, T] \times \mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とする．この常微分方程式の解の存在と一意性を議論する時, 通常次の積分方程式を導入する．

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \, ds, \quad t \in [0, T].$$

この積分方程式は, 先の常微分方程式を 0 から t まで積分することで得られる．この積分方程式を満たす連続関数 $x(t)$ が 元の常微分方程式を満たすことは, 積分方程式の右辺を t について微分することで確かめられる．よって, 今考えている常微分方程式と, そこから得られる積分方程式は同値であると考えることができる．

この考えを応用するため, 定常輸送方程式を次のように書き換える.

$$-\frac{d}{dt}I(x+t\xi,\xi)-(\mu_a+\mu_s)I(x+t\xi,\xi) \\ +\mu_s\int_{S^{n-1}}p(\xi,\xi')I(x+t\xi,\xi')\,d\sigma_{\xi'}=0,\quad (x,\xi)\in\Omega\times S^{n-1}.$$

ここで, t は実数で, $x+t\xi\in\Omega$ が成り立つものとする. これをパラメータ t に関する常微分方程式だと思い, 境界条件に注意して積分して整理すると, 次の積分方程式が得られる. この積分方程式の解を定常輸送方程式の解と呼ぶことにする. なお, 以下の議論では, $x=(x_1,x_2)$ と $x\in\Omega$ の成分を表示し, $I(x,\xi)$ を $I(x_1,x_2,\xi)$ と表記することもある.

定義 1 $I\in C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ が次の積分方程式を満たすとき, I は定常輸送方程式の境界値問題 (1)-(2) の解であるという.
$\theta\in(0,\pi)$ のとき,

$$I(x,\xi)=\exp\left(-\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}x_2\right)I_0(x_1-x_2\cot\theta,0,\xi) \\ +\frac{\mu_s}{\sin\theta}\int_0^{x_2}\exp\left(-\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(x_2-t)\right)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I(x_1-(x_2-t)\cot\theta,t,\xi')\,d\sigma_{\xi'}dt. \quad (3)$$

$\theta\in(-\pi,0)$ のとき,

$$I(x,\xi)=\exp\left(\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(1-x_2)\right)I_0(x_1+(1-x_2)\cot\theta,1,\xi) \\ -\frac{\mu_s}{\sin\theta}\int_{x_2}^{1}\exp\left(\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(t-x_2)\right)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I(x_1+(t-x_2)\cot\theta,t,\xi')\,d\sigma_{\xi'}dt. \quad (4)$$

先行研究では, この意味での解の存在と一意性について議論されてきた. しかし, 常微分方程式の場合とは違い, $\theta=0,\pi$ では積分方程式が定義されていないため, この積分方程式から直ちに古典解の存在が言えるわけではない. この差を埋めたのが本研究の新しい結果である. 以後の節では, この積分方程式の解が適当な条件の下で古典解になっていることを証明する.

5 積分方程式の解の存在と一意性

まずは一意性を示す. I_1, I_2 を解とし, $I:=I_1-I_2$ とおく. このとき, 解の定義から I は $C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ に属し, 次の積分方程式を満たすことが分かる:
$x_1\in\mathbb{R},x_2\in[0,1),\theta\in(0,\pi)$ のとき,

$$I(x,\xi)=\frac{\mu_s}{\sin\theta}\int_0^{x_2}\exp\left(-\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(x_2-t)\right)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I(x_1-(x_2-t)\cot\theta,t,\xi')\,d\sigma_{\xi'}dt. \quad (5)$$

$x_1\in\mathbb{R},x_2\in(0,1],\theta\in(-\pi,0)$ のとき,

$$I(x,\xi)=-\frac{\mu_s}{\sin\theta}\int_{x_2}^{1}\exp\left(\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(t-x_2)\right)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I(x_1+(t-x_2)\cot\theta,t,\xi')\,d\sigma_{\xi'}dt. \quad (6)$$

(5), (6) を評価することで, 不等式 $\|I\|_\infty\le\dfrac{\mu_s}{\mu_a+\mu_s}\|I\|_\infty$ を得る. この不等式からただちに, $I=0$ すなわち $I_1=I_2$ がしたがう.

次に, 解の存在を構成によって示す. $(\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-$ 上の関数列 $\{I^{(n)}\}_{n\ge0}$ を次のように帰納的に定義する. $I^{(0)}$ を

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0,1), \theta \in (0,\pi)$ のとき,

$$I^{(0)}(x,\xi) := \exp\biggl(-\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}x_2\biggr)I_0(x_1 - x_2\cot\theta, 0, \xi).$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0,1], \theta \in (-\pi,0)$ のとき,

$$I^{(0)}(x,\xi) := \exp\biggl(\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(1-x_2)\biggr)I_0(x_1 + (1-x_2)\cot\theta, 1, \xi).$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0,1), \theta \in \{0,\pi\}$ のとき,

$$I^{(0)}(x,\xi) := 0.$$

で定義する. また, $I^{(n)}$ まで定義できたとして, $I^{(n+1)}$ を

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0,1), \theta \in (0,\pi)$ のとき,

$$I^{(n+1)}(x,\xi) := \frac{\mu_s}{\sin\theta}\int_0^{x_2}\exp\biggl(-\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(x_2-t)\biggr)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I^n(x_1-(x_2-t)\cot\theta, t, \xi')\,d\sigma_{\xi'}dt.$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0,1], \theta \in (-\pi,0)$ のとき,

$$I^{(n+1)}(x,\xi) := -\frac{\mu_s}{\sin\theta}\int_{x_2}^{1}\exp\biggl(\frac{\mu_a+\mu_s}{\sin\theta}(t-x_2)\biggr)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I(x_1+(t-x_2)\cot\theta, t, \xi')\,d\sigma_{\xi'}dt.$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0,1), \theta = 0$ のとき,

$$I^{(n+1)}(x,\xi) := \mu_s\int_0^\infty \exp(-(\mu_a+\mu_s)\,s)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I^{(n)}(x_1-s, x_2, \xi')\,d\sigma_{\xi'}.$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0,1), \theta = \pi$ のとき,

$$I^{(n+1)}(x,\xi) := \mu_s\int_0^\infty \exp(-(\mu_a+\mu_s)\,s)\int_{S^1}p(\xi,\xi')I^{(n)}(x_1+s, x_2, \xi')\,d\sigma_{\xi'}.$$

で定義する. このとき, 次の 2 つが簡単な計算により分かる.

補題 1 $I^{(n)} \in C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ と仮定する. このとき, 次の評価が成り立つ.

$$\|I^{(n+1)}\|_\infty \le \frac{\mu_s}{\mu_a+\mu_s}\|I^{(n)}\|_\infty.$$

命題 1 $I_0 \in C_b(\Gamma_-)$ ならば, すべての $n \ge 0$ に対して, $I^{(n)} \in C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ が成り立つ.

補題 1 と命題 1 から, $I(x,\xi) := \sum_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(x,\xi)$ が $(\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-$ 上絶対一様収束し, $C_b\left((\Omega\times S^1)\cup\Gamma_-\right)$ に属することが分かる. また, この $I(x,\xi)$ が解となっていることも級数の計算により確認できる.
以上より, 解の存在が示された.

6 積分方程式の解の微分可能性

発見的考察ではあるが, 先に導入した積分方程式の両辺を x_1 について偏微分する.
$\theta \in (0, \pi)$ のとき,

$$\frac{\partial I}{\partial x_1}(x, \xi) = \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta} x_2\right) \frac{\partial I_0}{\partial x_1}(x_1 - x_2 \cot\theta, 0, \xi) + \frac{\mu_s}{\sin\theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta}(x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I}{\partial x_1}(x_1 - (x_2 - t)\cot\theta, t, \xi')\, d\sigma_{\xi'} dt. \tag{7}$$

$\theta \in (-\pi, 0)$ のとき,

$$\frac{\partial I}{\partial x_1}(x, \xi) = \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta}(1 - x_2)\right) \frac{\partial I_0}{\partial x_1}(x_1 + (1 - x_2)\cot\theta, 1, \xi) - \frac{\mu_s}{\sin\theta} \int_{x_2}^{1} \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta}(t - x_2)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I}{\partial x_1}(x_1 + (t - x_2)\cot\theta, t, \xi')\, d\sigma_{\xi'} dt. \tag{8}$$

これは元の積分方程式と同じ形をしているので, 前節と同じ議論で $\frac{\partial I}{\partial x_1}$ が $C_b\left(\left(\Omega \times S^1\right) \cup \Gamma_-\right)$ に属することが分かる. もう少し詳しく述べると, この議論は級数解 $I(x, \xi) := \sum_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(x, \xi)$ が x_1 について項別微分可能であることを主張している.

ところが x_2 偏導関数については, このような事情になっていない. というのも, $I^(n)$ の x_2 偏導関数が $\Omega \times S^1$ 上有界でも, I^{n+1} の x_2 偏導関数が $\Omega \times S^1$ 上有界になるかどうかは非自明だからである. 一般に, 定常輸送方程式の解の 1 階導関数は境界近傍で非有界になることが知られている [1]. そこで, 本節では I が Ω の内部で x_2 について項別微分可能であることを示す.

命題 2 K を区間 $(0, 1)$ 内のコンパクト部分集合とする. このとき, 任意の $n \geq 0$ に対して, $\dfrac{\partial I^{(n)}}{\partial x}$ は $\mathbb{R} \times K \times S^1$ 上連続かつ有界である.

命題 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}(x, \xi)$ は $\mathbb{R} \times K \times S^1$ 上絶対一様収束する.

ここで, K として閉区間 $[\delta, 1 - \delta]$, $0 < \delta < 1/2$ のみを考える. この場合のみ議論すれば十分である. このようにとった K に対して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = \delta$$

を満たす正数列 $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ をとる. さらに, $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ に対応する閉区間の列 $\{K_n\}_{n \geq 0}$ を

$$K_n := \left[\sum_{m=0}^{n} \delta_m, 1 - \sum_{m=0}^{n} \delta_m\right]$$

で定義する. $\mathbb{R} \times K \times S^1$, $\mathbb{R} \times K_n \times S^1$ 上の連続関数の最大値ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_K$, $\|\cdot\|_{K_n}$ で表すことにする. このとき, 次の補題が成立する.

補題 2 $\dfrac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$ が $\mathbb{R} \times K_n \times S^1$ 上連続ならば, $\dfrac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}$ は $\mathbb{R} \times K_{n+1} \times S^1$ 上連続でかつ次の不等式を満たす.

$$\left\|\frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}\right\|_{K_{n+1}} \leq \frac{2\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)} \|I^{(n)}\|_\infty + \frac{\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)^2} \left\|\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1}\right\|_\infty + \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\|\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}\right\|_{K_n}.$$

定義より任意の $n \geq 0$ に対して $K \subset K_n$ が成り立つから, 補題 2 から命題 2 が成立することが分かる. また, 特に $\tilde{\mu}_a := \dfrac{\mu_a}{2}$, $\delta_0 := \dfrac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\mu}_a + \mu_s}\delta$, $\delta_{n+1} := \dfrac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a + \mu_s}\delta_n$ ととれば, 次の評価が成り立つことが分かる.

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial I}{\partial x_2} \right\|_K &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2} \right\|_{K_n} \\
&\leq \left\| \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2} \right\|_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n + \frac{1}{e\delta(\mu_a + \mu_s)} \left(\frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\tilde{\mu}_a} \right)^2 \left\| \frac{\partial I_0}{\partial x_1} \right\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n \\
&\quad + \frac{2\|I_0\|_{\Gamma_-}}{e\delta} \left(\frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\tilde{\mu}_a} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n .
\end{aligned}
$$

右辺は有限確定するから, 命題 3 が示された.

参考文献

[1] D. S. Anikonov, A. E. Kovtanyuk and I. V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography* (2002), VSP, The Netherlands.

[2] M. Choulli and P. Stefanov, AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE STATIONARY TRANSPORT EQUATION, *Osaka J. Math.* **36** (1)(1998), pp. 87–104

[3] A. D. Klose, U. Nets, J. Beuthan and A. H. Hielscher, Optical Tomography Using the Time-Independent Equation of Radiative Transfer — Part 1 : Forward Model, *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **72** (2002), pp. 691–713.

[4] 藤原 宏志, 多重格子法による輸送方程式の定常問題に対する差分法の高速解法, 計算数理工学論文集, **11** (2011), 論文 pp. 13–18.