

# 古典群の double Bruhat cell 上の クラスター変数と結晶基底

上智大学理工学研究科 博士後期課程二年 金久保 有輝 (Yuki Kanakubo)

## 記号

$G$  をランク  $r$  の  $\mathbb{C}$  上の古典的代数群,  $B, B^- \subset G$  をそれぞれ, 上三角, 下三角行列全体とする.  $B, B^-$  は, ボレル 部分群と呼ばれる.  $H := B \cap B^-$  とし,  $N, N^-$  を unipotent radicals,  $W = \text{Norm}(H)/H$  を ワイル 群とする. ワイル群  $W$  は, 単純鏡映  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq r}$  によって生成される.  $\Lambda_i$  を  $i$  番目の基本ウエイト,  $I = \{1, 2, \dots, r\}$  を添字集合とする. 古典的な代数群は, 以下の 4 種類である:

型	G	ディンキン図形
A	$\text{SL}_{r+1}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{Mat}_{r+1}(\mathbb{C}) \mid \det(x) = 1\}$	
B	$\text{SO}_{2r+1}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{SL}_{2r+1}(\mathbb{C}) \mid {}^t x \cdot J_{2r+1} \cdot x = J_{2r+1}\}$	
C	$\text{Sp}_{2r}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{SL}_{2r}(\mathbb{C}) \mid {}^t x \cdot J_{2r}^- \cdot x = J_{2r}^-\}$	
D	$\text{SO}_{2r}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{SL}_{2r}(\mathbb{C}) \mid {}^t x \cdot J_{2r} \cdot x = J_{2r}\}$	

ここに,

$$J_N := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad J_{2r}^- = \begin{pmatrix} & & & J_r \\ & & & \\ & & & \\ -J_r & & & \end{pmatrix}.$$

各型のディンキン図形に対し, カルタン行列  $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$  を

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } \begin{matrix} \bullet & \text{---} & \bullet \\ i & & j \end{matrix}, \begin{matrix} \bullet & \rightleftharpoons & \bullet \\ i & & j \end{matrix} \\ -2 & \text{if } \begin{matrix} \bullet & \rightleftharpoons & \bullet \\ i & & j \end{matrix}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. また,  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$  を,  $DA$  が対称行列となるような正整数対角行列とする.

# 1 Introduction

代数群は、群構造の入った variety である。古典的なものとして、上記の A, B, C, D 型の 4 種類がある。代数群の unipotent radical  $N$  上の座標環  $\mathbb{C}[N]$  は、クラスター代数という代数構造を持つ。これは、クラスター変数と呼ばれる特別な生成元を持つ代数であり、その生成元に注目することによって組合せ論的に代数構造を調べることができる。小行列式 (またはそれを一般化した generalized minors) は、 $\mathbb{C}[N]$  のクラスター変数の一部であり、これらから他のクラスター変数を、一定の規則で次々と構成していくことができるのである。

一方、代数群が与えられると、そのリー環を考えることもできる。リー環の普遍包絡環  $U(\mathfrak{g})$  を考えると、その部分環  $U(\mathfrak{n})$  ( $\mathfrak{n} := \text{Lie}(N)$ ) に、Lusztig-半標準基底という基底が幾何的に構成される [1]。座標環  $\mathbb{C}[N]$  と  $U(\mathfrak{n})$  は互いに双対関係にあり、半標準基底の双対底が、先に述べた  $\mathbb{C}[N]$  のクラスター変数に一致する。このようにクラスター代数は、座標環における小行列式や、包絡環の半標準基底の双対底の性質を包括的に研究するために、Fomin, Zelevinsky 両氏によって導入された [3]。Geiss, Leclerc, Schreier の三氏による論文 [12] では、双対半標準基底の性質が、クラスター代数の観点から研究されている。

本講演では、double Bruhat cell  $G^{u,v} := BuB \cap B^-vB^-$  ( $u, v \in W$ ) と呼ばれるセル上の座標環  $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  を考える。[3] の続編の論文 [5] では、 $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  のクラスター構造が明らかにされている。最近の我々の研究で、 $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  におけるクラスター変数である小行列式 (あるいは generalized minors) と、結晶基底との関係がわかった。結晶基底は、量子群の表現を組み合わせ論的に扱うために柏原氏によって導入された [8] もので、ヤング盤やローラン単項式を用いて表示される。[13] では、A 型代数群上の小行列式を座標変換して得られたローラン多項式が、結晶基底をローラン単項式で表示したものの和になることを示した。座標環におけるクラスター変数と、結晶基底の関係が発見されたということである。本講演では、この結果を B, C, D 型に拡張する。

このレポートでは、2 節で代数群とそのリー環、3 節で普遍包絡環の定義を復習し、クラスター代数を例で説明する。4 節で座標環のクラスター代数構造に関する事実を紹介する。5 節で量子群とその表現論、そして結晶基底についての定義を復習し、6 節で主結果を記述し、7 節でその結果から期待される応用について述べる。なお、本研究は上智大学の中島俊樹教授との共同研究である。

## 2 代数群とリー環

まず、古典的代数群とそのリー環について思い出そう。リー環の代数的性質から、代数群の代数的性質、幾何的性質が分かるのであった。古典的代数群  $G$  に対し、そのリー環  $\text{Lie}(G)$  は、

$$\text{Lie}(G) := \{X \in \text{Mat}_N(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in G, (t \in \mathbb{R})\}$$

で定められる。これはベクトル空間の構造を持ち、更に括弧積  $[x, y] := xy - yx$  という演算で閉じている。代数群とそのリー環は、車輪の両輪のように研究される。例えば、 $\text{SL}_{r+1}(\mathbb{C}) := \{x \in \text{Mat}_{r+1}(\mathbb{C}) \mid \det(x) = 1\}$  のリー環は、 $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{Mat}_{r+1}(\mathbb{C}) \mid \text{trace}(x) = 0\}$  であるが、これは  $\{e_i = E_{i,i+1}, f_i = E_{i+1,i}, h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \mid i \in I\}$  という (リー環としての) 生成元を持ち、以下の関係式を満たす:

- (1)  $[h_i, h_j] = 0,$
- (2)  $[h_i, e_j] = a_{ij}e_j,$
- (3)  $[h_i, f_j] = -a_{ij}f_j,$
- (4)  $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_j,$

$$(5) \ i \neq j \text{ のとき, } \text{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0,$$

$$(6) \ i \neq j \text{ のとき, } \text{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0,$$

ここに,  $E_{ij}$  は  $i$  行  $j$  列のみ 1 で, 他は 0 の正方行列,  $\text{ad}(x)(y) := [x, y]$  である. すると, 代数群  $\text{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$  の (群としての) 生成元を,  $\{\exp(te_i), \exp(tf_i), t^{h_i} \mid i \in I, t \in \mathbb{C}_{\neq 0}\}$  と構成できる:

$$\exp(te_i) = {}^{i\text{th}} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & t & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \exp(tf_i) = {}^{i\text{th}} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & t & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$t^{h_i} = \text{diag}(1, \dots, 1, \underset{\vee}{t}, \underset{\vee}{t^{-1}}, 1, \dots, 1).$$

一般の単純な代数群  $G$  に対しても同様で, そのリー環  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$  は, 先の (1)-(6) の関係式を満たす生成元  $\{e_i, f_i, h_i \mid i \in I\}$  を持ち,  $\{\exp(te_i), \exp(tf_i), t^{h_i} \mid i \in I, t \in \mathbb{C}_{\neq 0}\}$  が  $G$  の群としての生成元となる. このように, リー環の生成元から,  $G$  の代数的な性質を導くことができるのである. 更に,  $G$  の幾何学的な性質も導くことができる. まず, 以下のように  $G$  を非交和に分解する:

$$G = \amalg_{u,v \in W} G^{u,v}, \quad G^{u,v} := BuB \cup B^-vB^-.$$

$G^{u,v}$  は double Bruhat cell と呼ばれるセルである. 単純鏡映  $\{s_i\}$  を用いて,  $u = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ ,  $v = s_{j_1} \cdots s_{j_m}$  と最短表示する.  $x_i(t) := \exp(te_i)$ ,  $y_i(t) := \exp(tf_i)$  とおき, 写像  $\mathbf{x}_i : H \times (\mathbb{C}_{\neq 0})^{n+m} \rightarrow G^{u,v}$  を,  $\mathbf{x}_i(a; t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}) = a \cdot y_{i_1}(t_1) y_{i_2}(t_2) \cdots y_{i_n}(t_n) x_{j_1}(t_{n+1}) x_{j_2}(t_{n+2}) \cdots x_{j_m}(t_{n+m})$  で定める.

**命題 2.1.** [2]  $\mathbf{x}_i$  は,  $H \times (\mathbb{C}_{\neq 0})^{n+m}$  と  $G^{u,v}$  のある Zariski 開集合の間の双正則同型を与える.

これにより,  $G$  は  $H \times (\mathbb{C}_{\neq 0})^{n+m}$  を貼り合わせたような幾何構造を持っていることがわかる.

### 3 座標環とリー環の普遍包絡環, クラスター代数

前節では, 代数群とそのリー環の関係について述べた. 次は, 代数群の座標環と, リー環の普遍包絡環の関係について述べよう. リー環  $\mathfrak{g}$  は, 括弧積という結合則を満たさない積を持つベクトル空間であった. リー環の表現を考えると,  $\mathfrak{g}$  が結合則の成り立つ積を持たないのは何かと不便である. そのため, リー環の表現を考えると, 代わりに普遍包絡環  $U(\mathfrak{g})$  を考えることが多い. これは, 次の関係式を満たす生成元  $\{e_i, f_i, h_i \mid i \in I\}$  を持つ  $\mathbb{C}$  上の結合代数である:

$$(1)' \ h_i h_j = h_j h_i,$$

$$(2)' \ h_i e_j - e_j h_i = a_{ij} e_j,$$

$$(3)' \ h_i f_j - f_j h_i = -a_{ij} f_j,$$

$$(4)' \ e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} h_j,$$

$$(5)' \ i \neq j \text{ のとき, } \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} e_i^{1-a_{ij}-k} e_j e_i^k = 0,$$

$$(6)' \ i \neq j \text{ のとき, } \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} f_i^{1-a_{ij}-k} f_j f_i^k = 0.$$

これらは、先の  $\mathfrak{g}$  の生成元の間関係式 (1)-(6) において、 $[x, y]$  ( $x, y \in \mathfrak{g}$ ) を、 $xy - yx$  で置き換えたものである。このように定義すると、リー環の表現を考えると、普遍包絡環の表現を考えると同値になる。 $U(\mathfrak{n})$  (resp.  $U(\mathfrak{h}), U^-(\mathfrak{n})$ ) を、 $\{e_i\}_{i \in I}$  (resp.  $\{h_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I}$ ) で生成される  $U(\mathfrak{g})$  の部分代数とすると、 $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n})U(\mathfrak{h})U^-(\mathfrak{n})$  と分解される。座標環  $\mathbb{C}[N]$  と包絡環  $U(\mathfrak{n})$  は双対関係にある。

$\mathbb{C}[N] \cong U_{gr}^*(\mathfrak{n})$  や  $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  は、クラスター代数という代数構造を持つ。これは初期クラスター変数と呼ばれるいくつかの生成元から、他の生成元が次々と構成されていく、という代数構造である。座標環においては、次節で定める generalized minors が初期クラスター変数となる [5]。  $G$  が A 型代数群の場合、generalized minors は通常の小行列式に一致する。ここではクラスター代数の詳しい定義はせず、例で説明することにする。

**例 3.1.**  $D_{i_1 i_2 \dots i_s, j_1 j_2 \dots j_s}$  を、行が  $\{i_1, \dots, i_s\}$ 、列が  $\{j_1, \dots, j_s\}$  で添字付けられる小行列式とする。  $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$  とする。  $u = s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1$  に対し、座標環  $\mathbb{C}[G^{u,e}]$  の  $\mathbb{C}[D_{123,123}, D_{12,12}, D_{1,1}, D_{234,123}, D_{34,12}, D_{4,1}]$  上の生成元を、三つの生成元  $D_{2,1}, D_{23,12}, D_{3,1}$  から次々と構成していくことができる。例えば、

$$D_{13,12} = \frac{D_{3,1}D_{12,12} + D_{23,12}D_{1,1}}{D_{2,1}}, \quad D_{24,12} = \frac{D_{23,12}D_{4,1} + D_{34,12}D_{2,1}}{D_{3,1}},$$

$$D_{1,1}D_{2,2}D_{34,13} = \frac{D_{34,12}D_{2,1}D_{123,123} + D_{234,123}D_{3,1}D_{12,12}}{D_{23,12}}$$

というように、新しい生成元を三つ作ることができる。つまり、 $x_1 = D_{2,1}, x_2 = D_{23,12}, x_3 = D_{3,1}$  とするとき、 $((x_j)_{j \neq i}$  と係数の二項和) $/(x_i)$  という形の新たな生成元  $x'_i$  が構成できるのである。  $x'_1 = D_{13,12}, x'_2 = D_{24,12}, x'_3 = D_{24,12}$  である。組  $(x_1, x_2, x_3)$  をクラスター、 $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$  をクラスター変数と呼ぶ。各変数  $x_i$  を  $x'_i$  に置き換えることで、新たにクラスター  $(x'_1, x_2, x_3), (x_1, x'_2, x_3), (x_1, x_2, x'_3)$  を構成できる。これらから、それぞれ三つずつ、また新たなクラスター変数が構成される。このようにして、 $(x_1, x_2, x_3)$  から次々と新たなクラスター変数が構成されていき、そのようにして作られた全てのクラスター変数が、 $\mathbb{C}[G^{u,e}]$  の生成元となる。このような生成元を持つ代数のことをクラスター代数と呼ぶのである。特に、組  $(x_1, x_2, x_3)$  を初期クラスターと呼ぶ。

例えば  $G$  が A 型代数群の場合、 $N$  は対角成分が全て 1 の上三角行列全体のなす群となるが、 $\mathbb{C}[N]$  は  $N$  上の正則関数の集合なので、「小行列式」を含む。これは  $U(\mathfrak{n})$  における「半標準基底」の双対底となる。半標準基底は、 $U(\mathfrak{n})$  において幾何的に構成される基底であるが、その双対底である小行列式は、クラスター変数という組合せ論的な性質を持つ生成元なのである。  $G$  が他の型の場合は、次節で定める generalized minors が  $\mathbb{C}[N]$  の双対半標準基底となる。このようにクラスター代数は、minors や半標準基底の双対底の性質を統一的に扱うために導入された。以下では上の例のように、セル  $G^{u,v}$  上のクラスター変数を扱う。

## 4 座標環と generalized minor

前節でも少し触れた、座標環におけるクラスター変数である generalized minors を復習する。これについては、[5] が詳しい。  $G_0 = N^-HN$  とおき、 $x = [x]_- [x]_0 [x]_+$ 、 $[x]_- \in N^-$ 、 $[x]_0 \in H$ 、 $[x]_+ \in N$  と記す。

**定義 4.1.**  $u, v \in W, i \in \{1, \dots, r\}$  に対し、generalized minor  $\Delta_{u\Lambda_i, v\Lambda_i}$  は、開部分集合  $uG_0v^{-1}$  への制限が、 $\Delta_{u\Lambda_i, v\Lambda_i}(x) = ([u^{-1}xv]_0)^{\Lambda_i}$  で与えられる  $G$  上の正則関数である。

特に  $G = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$  (A 型代数群) のとき、これは通常の小行列式に一致する。A 型のワイル群は、対称群

$\mathfrak{S}_{r+1}$  に同型になり、各単純鏡映  $s_i$  は、互換  $(i, i+1)$  と見なすことができる。この場合、 $\Delta_{u\Lambda_i, v\Lambda_i}$  は、行が  $u\{1, 2, \dots, i\}$ 、列が  $v\{1, 2, \dots, i\}$  でラベル付される小行列式に等しい。

**例 4.2.**  $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ ,  $u = s_1s_2$ ,  $v = e$  のとき、 $u\{1, 2\} = \{2, 3\}$ ,  $v\{1, 2\} = \{1, 2\}$  であるから、 $x = (x_{i,j}) \in G$  に対し、

$$\Delta_{u\Lambda_i, \Lambda_i}(x) = \det \begin{bmatrix} x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{bmatrix} = x_{2,1}x_{3,2} - x_{2,2}x_{3,1}.$$

前節において、座標環  $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  はクラスター代数構造を持ち、上記の generalized minor がクラスター変数となると述べた。今回は、 $v = e$  の場合を中心に考える。 $u = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$  に対し、 $\mathbf{i} := (i_1, \dots, i_n)$  を  $u$  の reduced word という。 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対し、 $u_{\leq k} := s_{i_1} \cdots s_{i_k}$  とおく。このとき、

$$\Delta(k; \mathbf{i})(x) := \Delta_{u_{\leq k}\Lambda_{i_k}, \Lambda_{i_k}}(x) \quad (1 \leq k \leq n)$$

とおくと、これらが座標環  $\mathbb{C}[G^{u,e}]$  の初期クラスター変数となり、他のクラスター変数も、これらから次々と生成されるのである (例 3.1)。 $\mathbf{i}$  を  $u$  の reduced word とするとき、命題 2.1 の写像  $\mathbf{x}_i$  は、 $H \times (\mathbb{C}^\times)^{l(u)}$  と、double Bruhat cell  $G^{u,e}$  の Zariski 開集合との間の双正則同型なのであった。実は、写像  $\mathbf{x}_i$  の定義に出てくる  $y_i(t)$  を、 $x_{-i}(t) := y_i(t)\alpha_i^\vee(t^{-1})$  に変えた写像

$$\bar{\mathbf{x}}_i(a; t_1, \dots, t_n) = a \cdot x_{-i_1}(t_1)x_{-i_2}(t_2) \cdots x_{-i_n}(t_n)$$

も、 $H \times (\mathbb{C}^\times)^{l(u)}$  と、 $G^{u,e}$  の Zariski 開集合との間の双正則同型を与える。これを用いて次のように定める：

$$\Delta^G(k; \mathbf{i}) := \Delta(k; \mathbf{i}) \circ \bar{\mathbf{x}}_i \quad (2)$$

**例 4.3.**  $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$  とし、 $w := s_1s_2s_3s_1s_2$  を A 型ワイル群の元、 $\mathbf{i} = (1, 2, 3, 1, 2)$  をその reduced word とする。 $w_{\leq 2} = s_1s_2$  である。このとき、例 4.2 で確かめたとおり、

$$\Delta(2; \mathbf{i}) = \Delta_{w_{\leq 2}\Lambda_i, \Lambda_i}(x) = \Delta_{s_1s_2\Lambda_i, \Lambda_i}(x) = x_{2,1}x_{3,2} - x_{2,2}x_{3,1}$$

であった。一方、(1) により、

$$x_{-i}(t) = i^{\mathrm{th}} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & t^{-1} & 0 & & \\ & 1 & t & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

であるから、 $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4) \in H$  とすると、

$$\bar{\mathbf{x}}_i(a; Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Y_{2,1}, Y_{2,2}) = \begin{pmatrix} a_1 \frac{1}{Y_{1,1}Y_{2,1}} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \left( \frac{Y_{1,1}}{Y_{1,2}} + \frac{1}{Y_{2,1}} \right) & a_2 \frac{Y_{1,1}Y_{2,1}}{Y_{1,2}Y_{2,2}} & 0 & 0 \\ a_3 & a_3 \left( \frac{Y_{1,2}}{Y_{1,3}} + \frac{Y_{2,1}}{Y_{2,2}} \right) & a_3 \left( \frac{Y_{1,2}Y_{2,2}}{Y_{1,3}} \right) & 0 \\ 0 & a_4 & a_4 Y_{2,2} & a_4 Y_{1,3} \end{pmatrix}$$

よって、

$$\Delta^G(k; \mathbf{i})(a; Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Y_{2,1}, Y_{2,2}) = a_2 a_3 \left( \frac{Y_{1,1}}{Y_{1,3}} + \frac{Y_{1,2}}{Y_{1,3}Y_{2,1}} + \frac{1}{Y_{2,2}} \right). \quad (3)$$

**例 4.4.**  $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$  ( $C_2$  型代数群)、 $u = s_1s_2s_1s_2 \in W$ ,  $\mathbf{i} = (1, 2, 1, 2)$  に対し、

$$\Delta^G(2; \mathbf{i})(a; Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{2,1}, Y_{2,2}) = a^{(s_1s_2\Lambda_2)} \left( \frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}} + 2 \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}} + \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2} + \frac{1}{Y_{2,2}} \right). \quad (4)$$

## 5 量子群の表現論-結晶基底と単項式表示

我々の主定理は、前節で定めた generalized minors と、結晶基底の単項式表示の関係を論じるものである。結晶基底は量子群の表現論から生まれた概念である。これらについて復習する [8],[9].

### 5.1 量子群

$\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$  を  $G$  の Lie 環,  $q$  を不定元とする.  $[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ ,  $[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q$  とおき,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!}$$

とおく. 量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  とは, 次の関係式を満たす生成元  $\{e_i, f_i, q^{h_i} | i \in I\}$  を持つ  $\mathbb{C}(q)$  上の結合代数である:

- (1)"  $q^{h_i} q^{h_j} = q^{h_i+h_j} = q^{h_j} q^{h_i}$ ,
- (2)"  $q^{h_i} e_j q^{-h_i} = q^{a_{ij}} e_j$ ,
- (3)"  $q^{h_i} f_j q^{-h_i} = q^{-a_{ij}} f_j$ ,
- (4)"  $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{q^{a_i h_i} - q^{-a_i h_i}}{q^{a_i} - q^{-a_i}}$ ,
- (5)"  $i \neq j$  のとき,  $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q^{a_i}} e_i^{1-a_{ij}-k} e_j e_i^k = 0$ ,
- (6)"  $i \neq j$  のとき,  $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q^{a_i}} f_i^{1-a_{ij}-k} f_j f_i^k = 0$ .

各関係式 (1)"-(6)" において, ( $q^h$  をべき級数に展開してから)  $q \rightarrow 1$  とすると, Sect.3 で述べた普遍包絡環の関係式 (1)'-(6)' に一致する. 量子群は, Yang-Baxter 方程式

$$R_i(u) R_{i+1}(u+v) R_i(v) = R_{i+1}(v) R_i(u+v) R_{i+1}(u), \quad R_i(u) = 1 \otimes \cdots \otimes \overbrace{R(u)}^{i, i+1} \otimes \cdots \otimes 1 \quad (i = 1, \dots, N)$$

の解を構成するために導入された. ベクトル空間  $V$  に対し, これは  $V^{\otimes N+1}$  上のパラメーター付きの線形写像 (あるいは行列) の間の方程式であり, この方程式の解  $R(u) : V \rightarrow V$  のことを R 行列と呼ぶ. R 行列が一つ構成されると, それから統計力学における可解格子模型や, 結び目, 絡み目の不変量を構成することができる.

量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  とその表現  $V$  から, 普遍 R 行列と呼ばれる Y-B 方程式の解が一つ構成される. つまり, 量子群の表現を構成し, その構造を調べることによって, 可解格子模型や結び目の不変量を作り出すことができるのである. 例えば,  $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$  の自然表現という簡単な表現から, 結び目の不変量であるジョーンズ多項式が得られる. また, 表現  $V$  に対し, テンソル積表現  $V \otimes V$  を作ると, そこから 2 重結び目の不変量が得られるのである. このようなモチベーションのもと, 量子群とその表現論は研究されていくことになった.

量子群の表現は, リー環の表現と同様に考えることができる部分がある. 例えば, 有限次元単純リー環  $\mathfrak{g}$  の有限次元既約表現  $V$  は, ある  $\lambda \in P^+ := \bigoplus_i \mathbb{Z}_{\geq 0} \Lambda_i$  を用いて,

$$V = \bigoplus_{\mu \leq \lambda, \mu \in P} V_\mu, \quad V_\mu := \{v \in V | h_i v = \mu(h_i) v \ (i \in I)\},$$

と分解される.  $V_\mu \neq 0$  のとき,  $\mu$  をウエイト,  $V_\mu$  をウエイト空間と言う. このとき,  $V_\lambda$  は一次元であり,  $\lambda$  を最高ウエイトという. 同じ最高ウエイトを持つ既約表現は互いに同型になる. つまり, リー環  $\mathfrak{g}$  の有限次元既

約表現は,  $P^+$  で分類されるのである.

これは量子群においても同様で,  $U_q(\mathfrak{g})$  の有限次元既約表現  $V$  は,

$$V = \bigoplus_{\mu \leq \lambda, \mu \in P} V_\mu, \quad V_\mu := \{v \in V | q^{h_i} v = q^{\mu(h_i)} v \ (i \in I)\},$$

と分解され,  $P^+$  で分類される. やはり  $V_\lambda$  は一次元で,  $V_\lambda = \mathbb{C}(q)v_\lambda$  と書ける.  $v_\lambda \in V$  を最高ウェイトベクトルという. そこで, 最高ウェイト  $\lambda$  を持つ  $U_q(\mathfrak{g})$  の表現を  $V(\lambda)$  と記す. 先に述べたように,  $V(\lambda)$  の構造や, テンソル積の構造を調べたい. そこで用いられるのが, 次節で述べる結晶基底である.

## 5.2 量子群の表現論, 結晶基底

最高ウェイト  $\lambda \in P^+$  を持つ最高ウェイト表現  $V(\lambda)$  は, 結晶基底  $B(\lambda)$  を用いることで, 構造が明らかにされる.  $i$  ( $1 \leq i \leq r$ ),  $v \in V(\lambda)_\mu$  に対し,

$$v = v_0 + f_i v_1 + \frac{f_i^2}{[2]!} v_2 + \frac{f_i^3}{[3]!} v_3 + \cdots + \frac{f_i^N}{[N]!} v_N, \quad v_j \in \ker e_i \cap V(\lambda)_{\mu + j\alpha_i}$$

と一意に書ける. そこで,  $V(\lambda)$  上の作用素  $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$  を,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i v &= f_i v_0 + \frac{f_i^2}{[2]!} v_1 + \frac{f_i^3}{[3]!} v_2 + \frac{f_i^4}{[4]!} v_3 + \cdots + \frac{f_i^{N+1}}{[N+1]!} v_N, \\ \tilde{e}_i v &= v_1 + f_i v_2 + \frac{f_i^2}{[2]!} v_3 + \frac{f_i^3}{[3]!} v_4 + \cdots + \frac{f_i^{N-1}}{[N-1]!} v_N \end{aligned}$$

で定める. これらを **Kashiwara operators** と呼ぶ. 今,  $A_0 := \{\frac{q}{h} | g, h \in \mathbb{C}[q], h(0) \neq 0\} \subset \mathbb{C}(q)$  とおき,  $L(\lambda)$  を,  $\{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_s} v_\lambda | s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i_1, \dots, i_s \leq r\}$  で定められる,  $V(\lambda)$  の部分  $A_0$  代数とする. そこで,  $L(\lambda)/qL(\lambda)$  の  $\mathbb{C}$  上の基底を

$$B(\lambda) := \{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_s} v_\lambda + qL(\lambda) | s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i_1, \dots, i_s \leq r\}$$

で定義する. ベクトル空間  $L(\lambda)/qL(\lambda)$  は,  $V(\lambda)$  で  $q$  を 0 にしたような空間となっており,  $q$  を温度に見立てて,  $B(\lambda)$  を結晶基底と呼ぶ. 結晶基底の元は, ヤング盤や道 などの様々な表示方法を持ち, それらによって表現の構造やテンソル積の計算を, 組合せ論的に扱うことができるようになる. そのような表示方法のうち, 単項式表示と呼ばれるものがある. これは,  $B(\lambda)$  の元を変数  $\{Y_{s,i} | s \in \mathbb{Z}, i \in I\}$  のローラン単項式で表示する方法で,  $C_i := (\text{分子の } Y_{*,i} \text{ の個数}) - (\text{分母の } Y_{*,i} \text{ の個数})$  とおくと,  $\sum_i C_i \Lambda_i$  がその元のウェイトを表している. また, Kashiwara operator の作用は, ローラン単項式の掛け算で表される. 単項式表示の詳しい定義の仕方は, 柏原氏の論文 [9] を参照していただきたい. ここでは例を述べる.

**例 5.1.**  $G = \text{SL}_4(\mathbb{C})$  ( $A_3$  型代数群) とする.

図 1 は, 結晶基底  $B(\Lambda_2)$  のヤング盤表示 (左) と単項式表示 (右) であり, 表現  $V(\Lambda_2)$  が 6 次元で, ウェイト  $\Lambda_2, \Lambda_1 + \Lambda_3 - \Lambda_2, \Lambda_3 - \Lambda_1, \Lambda_1 - \Lambda_3, \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_1, -\Lambda_2$  のウェイト空間に分解されることを示している.

例 4.3 の  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  の式 (3) に現れる項の集合  $\{\frac{Y_{1,1}}{Y_{1,3}}, \frac{Y_{1,2}}{Y_{1,3}Y_{2,1}}, \frac{1}{Y_{2,2}}\}$  は, 上記の結晶基底  $B(\Lambda_2)$  の単項式表示の一部と一致していることに注意する. この部分は lower Demazure crystal  $B_{s_1 s_2 s_3 s_1 s_2}^-(\Lambda_2)$  と呼ばれる. つまり, **generalized minor** に座標変換を施したものの項に, 結晶基底を単項式表示したものが現れた, ということである. これが我々の主結果である. 次節で詳細を述べる.

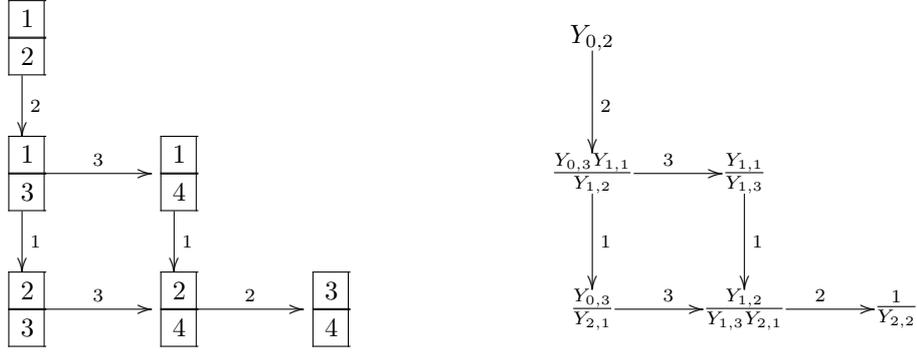


図 1

例 5.2. 他の型においても, A 型代数群の例 5.1 と同様の現象が起こる.  $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$  ( $C_2$  型代数群) とする.

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}. \quad (5)$$

$$Y_{0,2} \xrightarrow{2} \frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}} \xrightarrow{1} \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}} \xrightarrow{1} \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2} \xrightarrow{2} \frac{1}{Y_{2,2}}. \quad (6)$$

Diagram (5), (6) はそれぞれ, 結晶基底  $B(\Lambda_2)$  のヤング盤表示, 単項式表示で, 表現  $V(\Lambda_2)$  がウエイト  $\Lambda_2, 2\Lambda_1 - \Lambda_2, 0, \Lambda_2 - 2\Lambda_1, -\Lambda_2$  のウエイト空間に分解される 5 次元表現であることを表している. 例 4.4 における (4) に現れる項の集合  $\{\frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}}, \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}}, \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2}, \frac{1}{Y_{2,2}}\}$  は, 上記の結晶基底  $B(\Lambda_2)$  の単項式表示の一部と一致している. この部分は lower Demazure crystal  $B_{s_1 s_2}^-(\Lambda_2)$  である. 項の係数に, 2 が現れることを除くと, generalized minor  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  は, 結晶基底を単項式表示したものの和で書くことができる, というのである.

主結果を述べる前に, Demazure crystal の定義を紹介する.

定義 5.3.  $v_\lambda$  (resp.  $v_{\bar{\lambda}}$ ) を,  $B(\lambda)$  の最高 (resp. 最低) ウエイトベクトルとする. まず,  $B_e(\lambda) := \{v_\lambda\}$  (resp.  $B_e^-(\lambda) := \{v_{\bar{\lambda}}\}$ ) とおく. また,  $w \in W$  に対し,  $s_i w < w$  のとき,

$$B_w(\lambda) := \{\tilde{f}_i^k b \mid k \geq 0, b \in B_{s_i w}(\lambda), \tilde{e}_i b = 0\} \setminus \{0\},$$

$$B_w^-(\lambda) := \{\tilde{e}_i^k b \mid k \geq 0, b \in B_{s_i w}^-(\lambda), \tilde{f}_i b = 0\} \setminus \{0\}$$

と定める.  $B_w(\lambda)$  を Demazure crystal,  $B_w^-(\lambda)$  を lower Demazure crystal と呼ぶ.

## 6 Generalized minors と結晶基底

主定理を述べよう. 各 A, B, C, D 型古典群において, 最長元の reduced word は次で与えられる:

$$\mathbf{i}_0 = \begin{cases} \underbrace{(1, 2, \dots, r)}_{1 \text{ st cycle}}, \underbrace{1, 2, \dots, r-1, \dots, 1, 2, 3}_{2 \text{ nd cycle}}, \dots, \underbrace{1, 2, 3}_{(r-2) \text{ th cycle}}, 1, 2, 1) & \text{for } A_r, \\ \underbrace{(1, 2, \dots, r)}_{1 \text{ st cycle}}, \underbrace{1, 2, \dots, r \dots, 1, 2, \dots, r}_{2 \text{ nd cycle}}, \dots, \underbrace{1, 2, \dots, r}_{r \text{ th cycle}} & \text{for } B_r, C_r, \\ \underbrace{(1, 2, \dots, r)}_{1 \text{ st cycle}}, \underbrace{1, 2, \dots, r \dots, 1, 2, \dots, r}_{2 \text{ nd cycle}}, \dots, \underbrace{1, 2, \dots, r}_{r-1 \text{ th cycle}} & \text{for } D_r. \end{cases} \quad (7)$$

$u \in W$  を, その reduced word  $\mathbf{i}$  が, (7) の  $\mathbf{i}_0$  の left factor で表わされるものとする. A 型なら,

$$\mathbf{i} = (\underbrace{1, \dots, r}_{1 \text{ st cycle}}, \underbrace{1, \dots, r-1}_{2 \text{ nd cycle}}, \dots, \underbrace{1, \dots, r-m+2}_{m-1 \text{ th cycle}}, \underbrace{1, \dots, d}_{m \text{ th cycle}}) \quad (8)$$

という形, B, C, D 型なら,  $\mathbf{i} = (1, \dots, r)^{m-1}(1, \dots, d)$  という形である. まずは A 型に関する結果を述べよう. 変数  $\mathbf{Y}$  を次のようにおく:

$$\mathbf{Y} = (a; Y_{1,1}, \dots, Y_{1,r}, \dots, Y_{m-1,1}, \dots, Y_{m-1,r-m+2}, Y_{m,1}, \dots, Y_{m,d}).$$

**定理 6.1.** [13]  $i_k$  を, (8) の  $\mathbf{i}$  の左から  $k$  番目の数字とする.  $i_k$  は,  $m'$  th cycle に属するとする. このとき,

$$\Delta^G(k; \mathbf{i})(\mathbf{Y}) = a^{(u_{\leq k} \Lambda_d)} \left( \sum_{b \in B_{u_{\leq k}}^-((m-m')\Lambda_d)} \mu(b) \right), \quad (9)$$

となる. ここに,  $B_{u_{\leq k}}^-((m-m')\Lambda_d)$  は  $B((m-m')\Lambda_d)$  の lower Demazure crystal,  $\mu$  は  $B((m-m')\Lambda_d)$  のある単項式表示である.

例 5.1 で述べた通り, generalized minors を座標変換したものが,  $(k, \mathbf{i}$  から決まる) 結晶基底の一部を単項式表示したものの和になる, ということである. 他の型になると, この性質は  $m-m'=1$  の場合は (係数を無視すれば) 成り立つ, というのが次の定理である. B, C, D 型に関する結果を述べるために,  $\mathbf{Y} = (a; Y_{1,1}, \dots, Y_{1,r}, \dots, Y_{m-1,1}, \dots, Y_{m-1,r}, Y_{m,1}, \dots, Y_{m,d}) \in H \times (\mathbb{C}^\times)^n$  とおく.

**定理 6.2.**  $i_k$  は,  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$  の  $(m-1)$ th cycle に属するとする. このとき,

$$\Delta^G(k; \mathbf{i})(\mathbf{Y}) = a^{(u_{\leq k} \Lambda_d)} \left( \sum_{b \in B_{u_{\leq k}}^-(\Lambda_d)} c_b \mu(b) \right), \quad (10)$$

となる. ここに,  $B_{u_{\leq k}}^-(\Lambda_d)$  は  $B(\Lambda_d)$  の lower Demazure crystal,  $c_b$  はある正整数,  $\mu$  は  $B(\Lambda_d)$  のある単項式表示である.

## 7 今後の展望

前節で述べた結果は, 座標環  $\mathbb{C}[G^{u,e}]$  の生成元を, 結晶基底と関係づけるものであった. 座標環の理論が, クラスタ代数やリー環論などと密接に関わっていることは既に述べた. 座標環理論を結晶基底の言葉で理解し, 関連分野に応用していくことが最終目標である.

5 節で紹介した単項式表示は, アファイン量子群の表現の指標である **q-character** の研究の中で生まれた. この指標は, その表現がどのようなウエイト空間に分解されるのか, そして各ウエイト空間の次元はいくつなのか, という情報を持っているものである. つまり, 与えられた表現の q-character の explicit formula が分かれば, その表現空間の構造が明らかになるのである. Fundamental modules, KR-modules という既約表現のクラスがあるが, それらの q-character の公式は, [10],[11] などで調べられている. 特に A, D, E 型の fundamental modules の q-characters は, ある結晶基底を単項式表示したものの和になることが知られている [10]. これは, 定理 6.2 で述べた  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  の性質と類似している. また, generalized minors  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  が, 簡単な添字の変換を行うことで, q-characters の部分和 と一致する例が見つかっている. 例えば A 型代数群の

上の minor  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  は, 添字変換をすることで, ある A 型 KR-module の q-character の部分和と一致する. より詳しく言うと, A 型の KR-module の q-character は, ある結晶基底を単項式表示したものの和になる. 対して  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  は, その内の Demazure crystal の部分のみを足し上げたものになっているのである. このように結晶基底の観点に立つと, minors と q-character の関連が見えてくる. [6] では, アファイン量子群の表現の同型類がなすグロタンディーク群を用いて, 有限型クラスター代数の圏化を行っている. その中で, 既約表現がクラスター変数の役割を担っている. 有限型とは, クラスター変数が有限個しか現れないクラスター代数のことである. 例えば, 座標環  $\mathbb{C}[(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}))^{e, w_0}]$  ( $w_0$  はワイル群の最長元) は有限型である.  $\mathbb{C}[(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}))^{e, w_0}]$  では初期クラスターだけでなく, 全てのクラスター変数が, Demazure crystal を単項式表示したものの和で書ける. そしてその変数たちは, 圏化の中で現れた既約表現の q-characters と類似している事が確認できている.

このように,  $G^{u, e}$ , あるいは  $G^{e, v}$  上の座標環は研究がしやすく, アファイン量子群の既約表現との繋がりが徐々に見つかり始めている. 有限型クラスター代数の分類は [4] でなされており, 多くの性質が明らかにされているが, 無限型については未解明な部分が多い. 最近では, 圏化を用いて, クラスター代数の中に”標準基底”を構成しようという研究がなされている [7]. 一般に, 座標環  $\mathbb{C}[G^{u, e}]$  は無限型となる. 初期クラスター以外のクラスター変数も結晶基底と関連付け, クラスター理論, アファイン量子群の表現論への応用を目指したい.

## 参考文献

- [1] G. Lusztig, Semicanonical bases arising from enveloping algebras, *Adv. Math.* vol.151 (2000).
- [2] A.Berenstein, A.Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, *Invent. Math.* vol.143, No.1 (2001).
- [3] S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras 1 : Foundations, *Journal of the Amer. Math. Soc.* vol.15, No.2 (2002).
- [4] S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras 2 : Finite type classification, *Invent. Math.* vol.154, No1 (2003).
- [5] A.Berenstein, S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras 3 : Upper bounds and double bruhat cells, *Duke Math. Journal* vol.126, No.1 (2005).
- [6] D.Hernandez, B.Leclerc, Cluster algebras and quantum affine algebras, *Duke Math. Journal.* vol.154, No.2 (2010).
- [7] S.Fomin, P. Pylyavskyy, Tensor diagrams and cluster algebras, arXiv:1210.1888 preprint (2012).
- [8] M.Kashiwara, On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. Journal.* vol.63, No.2 (1991).
- [9] M.Kashiwara, Realizations of crystals, in *Combinatorial and Geometric Representation Theory*, *Contemp. Math.* vol.325, Amer. Math. Soc. Providence, RI (2003).
- [10] H.Nakajima, t—analogs of q—characters of quantum affine algebras of type  $A_n, D_n$ , *Contemp. Math.* vol.325, Amer. Math. Soc. RI (2003).
- [11] A.Kuniba, T.Nakanishi, J.Suzuki, T-systems and Y-systems in integrable systems, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* (2010).
- [12] C.Geiss, B.Leclerc, J.Schrer, Kac-Moody groups and cluster algebras, *Adv. Math.* 228 (2011).
- [13] Y.Kanakubo, T.Nakashima, Cluster Variables on Certain Double Bruhat Cells of Type (u,e) and Monomial Realizations of Crystal Bases of Type A, *SIGMA* vol.11 (2015).