# Recognition problem of map-germs and applications (写像芽の認識問題とその応用)

加葉田雄太朗
Yutaro Kabata
北海道大学大学院理学院数学専攻

## 1 Introduction

我々が物体（曲面）を眺める時、そこには自然に $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の写像の特異点が輪郭として現れる。特に曲面の直線との接触は曲面の射影の局所的な特異点型により測ることができ、特異点理論は曲面の局所理論の有効なツールである [1, 2, 4, 5, 12]。

ポスターではまず $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への可微分写像の特異点（写像芽）の $\mathcal{A}$-型の著者による簡易な判定法を与える。次に判定法を用いてジェネリックな曲面のワンパラメーター族の中心射影に現れる特異点の分類に対する結果を紹介する。また、曲面の Monge form に関する条件式が上記の特異点の分類過程の副産物として得られるが、それに基づいて得られた曲面の Monge form のジェットの射影変換による分類、及びその BDE (binary differential equation) のトポロジカルな位相型の分類との関係も紹介する.

本稿では、特に写像芽の判定法について詳しく説明し、その応用については概要のみを説明する。詳細については [5, 12] を参考されたい。

## 2 Classification and Recognition

ポスター及び本稿では可微分写像芽 $f : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ で corank $(df)_0 = 1$ であるもの（以下では、corank1 写像芽と呼ぶ）を主な対象とし、これの $\mathcal{A}$-同値による同値類を考える。 なお、二つの可微分写像芽が $\mathcal{A}$-同値とはソースとターゲットの局所座標変換が存在して互いに移り合うことである。corank1 写像芽 $\mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ で $\mathcal{A}_e$-cod$\leq 4$ となるものの $\mathcal{A}$-同値類よる分類が J. H. Rieger によって与えられている [8]（表 1 )。(なお、

$\mathcal{A}_e$-cod$\leq r$ の写像芽とは写像族 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^2$ に一般的に現れる $\mathcal{A}$-特異点を意味する)。

では、任意に与えられた写像芽の $\mathcal{A}$-型はどのように判定できるであろうか？「与えられた写像芽がリストのうちのいずれの同値類に属するかを決定する判定法を与えよという問題は認識問題と呼ばれ実は自明ではない [4]。通常、与えられた写像芽がどの同値類に属するかを決定するには、テイラー展開の低次の項から順に具体的な座標変換を見つけて整理していく、という過程を踏まなければいけない。この過程は非常に煩雑であり、特に非専門家にとっては分類の結果を応用しようとするときの壁となるであろう。さらには、Rieger の分類は代数的な手法に基づいているので、Rieger のリストとその証明からは各同値類の幾何科学的な意味も見いだし難い。次節では佐治氏の $\mathcal{A}_e$-余次元 1 の写像芽の判定法 [10] を拡張した写像芽のジェットレベルでの系統的な判定法を紹介し、またテイラー展開の係数を用いた $\mathcal{A}$-型の判定法についても言及する。

# 3 Saji's criteria and the generalization

佐治氏の判定法は、以下で定義される $\lambda$*(discriminant function)* と $\eta$*(null vector filed)* という幾何学的な記号によって記述される。$\lambda$ は $\lambda(x,y) := \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}$ $(f=(f_1,f_2))$ として、$\eta$ は $f$ の特異点集合（$\lambda=0$）上で $df$ の kernel を張るようなベクトル場として、それぞれ定義する。これらを用いてより高次の corank1 写像芽 $\mathbb{R}^2,0 \to \mathbb{R}^2,0$ を次のようにジェットレベルで判定することができる。

**定理 3.1** 表 3 において第 1 列目におけるジェットの型は第 3 列目の条件によって判定できる。

なお $\mathcal{A}_e$-余次元 2 以上の $\mathcal{A}$-型の判定にはさらに条件が必要である。ここでは次の Butterfly と呼ばれる corank1 写像芽、およびその退化形（表における番号と標準形はそれぞれ $6:(x,xy+y^5\pm y^7)$、$7:(x,xy+y^5)$ と書かれる）の特徴付けを例として見てみよう [5]。

1. $j^5f(0) \sim_{\mathcal{A}^5} (x,xy+y^5) \Longleftrightarrow d\lambda(0)\neq 0,\ \ \eta\lambda(0)=\eta^2\lambda(0)=\eta^3\lambda(0)=0,\ \ \eta^4\lambda(0)\neq 0.$
2. さらに上の条件があるとき $f=(x,xy+y^5+\sum_{i+j\geq 6}a_{ij}x^iy^j)$ と表すことができ、
   $\alpha_f := a_{07}-\frac{5}{8}a_{06}^2 \neq 0 \Longleftrightarrow f\sim_{\mathcal{A}}(x,xy+y^5\pm y^7),\quad \alpha_f=0 \Longleftrightarrow f\sim_{\mathcal{A}}(x,xy+y^5)$

上の 1. では、座標変換によって $f$ の原点での 5-ジェット $j^5f(0)$（5 次までのテイラー展開）が $(x,xy+y^5)$ となることに対して、座標変換で不変になるような幾何学的な特徴付けを佐治氏のように $\eta$ と $\lambda$ を用いて与えている。しかしながらこれだけでは

| Specified jet [8] | $\mathcal{A}$-type [9] | Criteria [10, 11, 5] |
|---|---|---|
| regular : $(x, y)$ | 1 | $\lambda(0) \neq 0$ (we may assume $\lambda(0) = 0$ in the following) |
| fold : $(x, y^2)$ | 2 | $\eta\lambda(0) \neq 0$ |
| cusp : $(x, xy + y^3)$ | 3 | $d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$ |
| $I_2 : (x, y^3 \pm x^2 y)$ | $4_2^{\pm}$ | $d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) \neq 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$ |
| $I_* : (x, y^3)$ | $4_k^{\pm}$ $(k \geq 3)$ | $d\lambda(0) = 0, \mathrm{rk} H_\lambda(0) = 1, \eta^2\lambda(0) \neq 0$ |
| $II_4 : (x, xy + y^4)$ | 5 | $d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$ |
| $II_5 : (x, xy + y^5)$ | 6, 7 | $d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0$ |
| $II_6 : (x, xy + y^6)$ | 8, 9 | $d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \cdots = \eta^4\lambda(0) = 0, \eta^5\lambda(0) \neq 0$ |
| $II_7 : (x, xy + y^7)$ | 10 | $d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \cdots = \eta^4\lambda(0) = \eta^5\lambda(0) = 0, \eta^6\lambda(0) \neq 0$ |
| $III_* : (x, xy^2 + y^4)$ | $11_{2k+1}$ | $d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$ |
| $IV_1 : (x, xy^2 + y^5)$ | 12, 13, (14) | $d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0$ |
| $IV_2 : (x, xy^2 + y^6)$ | 15 | $d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = \cdots = \eta^4\lambda(0) = 0, \eta^5\lambda(0) \neq 0$ |
| $V_1 : (x, x^2 y + y^4)$ | 16, 17 | $d\lambda(0) = 0, \mathrm{rk} H_\lambda(0) = 1, \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$ |
| $V_2 : (x, x^2 y + Axy^3)$ | 18 | $d\lambda(0) = 0, \mathrm{rk} H_\lambda(0) = 1, \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0$ |
| $VI : (x, y^4 + \alpha x^2 y^2 + Ax^3 y)$ | 19 | $d\lambda(0) = 0, \mathrm{rk} H_\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$ |

表１　Classifications and criteria: 第２列目は対応する $\mathcal{A}_e$ 余次元４以下の $\mathcal{A}$-型（[8] を参照）を意味しており、３列目において $H_\lambda$ は $\lambda$ の Hesse 行列を表す。

butterfly$(x, xy + y^5 \pm y^7)$ とその退化系 $(x, xy + y^5)$ を区別することはできない。我々は 2. で見たように具体的に座標をとった時のテイラー展開の係数で書かれる判定式を必要とするのである。他の corank1 写像芽（$2 \leq \mathcal{A}_e$-cod$\leq 4$）も同様に、

1. $\eta$ と $\lambda$ によってジェットが特徴付けられ、
2. テイラー展開の係数によって各 $\mathcal{A}$-型が決定される

という形で記述される [5]。

# 4　Application to central projections of the surface

我々の判定法の応用として、曲面の中心射影に現れる特異点の分類を紹介する。$\pi_p : \mathbb{R}^3 - \{p\} \to \mathbb{R}P^2$ を、$x$ を $x - p$ で生成される直線に対応させるような自然な射影とした時、$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $M$ の点 $p(\in \mathbb{R}^3 - M)$ からの中心射影 $\varphi_p$ は $\varphi_p := \pi_p|_M : M \to \mathbb{R}P^2$ と定義される。興味深いことにジェネリックな曲面の中心射影には $\mathcal{A}_e$-cod$= 3$ の特異点のうちの３つ（$8, 12, 16$）が現れないことが Arnold と Platonova によって示されている [1, 6, 7]。彼らは Rieger とは異なる立場で曲面の中心射影に現れる特異点の分類を行っているため、Rieger のリストと曲面の中心射影に一般に現れる特異点との関係は明らかではない。講演者は前節の判定法を用いて、Rieger の分類の立場から Arnold と Platonova による結果の再証明を与えた。その過程で、判定法の $\eta^k\lambda(0)$ という量と $\alpha_f$ のように書ける量との違いで、特異点が中心射影にジェネリックに現れるかどうかが決定することを確かめた。

さらに同様の手法で、1-パラメーター曲面族の中心射影に一般に現れる特異点の分類も行い、Arnold と Platonova の結果の一般化を与えた。

## 5 Application to the classification of jets of Monge forms

以降では $\mathbb{R}^3 = \{[x;y;z;1]\}$ として $\mathbb{R}P^3$ の開部分集合とみなす。$\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面は任意の点で Monge form のテイラー展開により書ける。ポスター及び本稿の関心は曲面の局所理論なので、原点 0 で Monge form $z = f(x,y) = \sum_{ij} a_{ij}x^iy^j$ により定まる曲面（芽）$M$ を考える（$M = \{(x,y,f(x,y))\}$）。

前節の曲面の中心射影における特異点分類において、上の Mong form のジェット空間（多項式空間あるいは有限個の $a_{ij}$ の組がなす空間）のストラティフィケーションが自然に得られる。つまり、$M$ の中心射影の写像芽が原点である型になるという条件は Monge form のテイラー展開の係数 $a_{ij}$ に関する条件式を生み出すということである。

ここで得られたストラティフィケーションにおける各 stratum の射影変換による簡潔な標準形が本ポスターで紹介される（[12] も参照)。ただし、ジェネリックな曲面の Monge form に関する結果は Platonova [7] により与えられていたもので、それをパラメーター族に拡張したというのが著者等の新しい結果であるということを注意しておく。

本ポスターでは最後に、得られた標準形が表す曲面の原点における漸近曲線を定義する BDE

$$f_{yy}dy^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{xx}dx^2 = 0.$$

と [3, 13] などにおける BDE のなトポロジカルな分類との比較を紹介する。

# 参考文献


[1] V. I. Arnold, Singularities of caustics and wavefronts, Kluwer Acad. Publ. (1991).

[2] J. W. Bruce, Projections and reflections of generic surfaces in $\mathbb{R}^3$. Math. Scand. 54 no.2 (1984), 262-278.

[3] A. A. Davydov, Normal form of a differential equation, not solvable for the derivative, in a neighborhood of a singular point, Funct. Anal. Appl. 19 (1985), 1–10.

[4] T. Gaffney, The structure of $T\mathcal{A}(f)$, classification and an application to differential geometry, In singularities, Part I, Proc. Sympos. in Pure Math. 40 (1983), Amer. Math. Soc., 409-427.

[5] Y. Kabata, *Recognition of plane-to-plane map-germs*, arXiv:1505.01317.

[6] O. A. Platonova, Singularities of the mutual disposition of a surface and a line, *Uspekhi Mat. Nauk*, 36:1 (1981), 221–222.

[7] O. A. Platonova, Projections of smooth surfaces, *J. Soviet Math* **35** no.6 (1986), 2796–2808

[8] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane. J. London Math. Soc. (2) 36 (1987), no. 2, 351-369.

[9] J. H. Rieger, Versal topological stratification and the bifurcation geometry of map-germs of the plane. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107, no. 1, (1990), 127-147.

[10] K. Saji, Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications. Hiroshima Math. J. 40, (2010), 229-239.

[11] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, $A_k$ Singularities of wave fronts. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 146 (2009), no. 3, 731-746.

[12] H. Sano, Y. Kabata, J. Deolindo and T. Ohmoto, *Projective classification of jets of surfaces in* 3*-space*, arXiv:1504.06499.

[13] F. Tari, Two parameter families of implicit differential equations, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 13 (2005), 139–262