

プロジェクトネットワークの最短完了時間として実現できる トロピカル多項式の特徴づけ

伊藤 孝明 (Ito Takaaki)

首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻 博士後期課程 2 年

概要

プロジェクトネットワークの最短完了時間は、各作業時間についてのトロピカル多項式で表される。逆に、与えられたトロピカル多項式がプロジェクトネットワークの最短完了時間として実現できる (realizable という) ためには、まず term extendability と呼ばれる条件を満たすことが必要である。term extendability を持つトロピカル多項式には単純グラフを対応付けることができ、グラフの言葉を用いて、トロピカル多項式が realizable であるための必要十分条件が述べられる。

1 定義

1.1 トロピカル演算

\mathbb{R} を実数全体の集合とする。 \mathbb{R} 上の 2 つの演算 \oplus, \otimes を、次のように定義する。

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \otimes b = a + b.$$

これらをトロピカル演算と呼ぶ。トロピカル演算は $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ に自然に拡張され、 $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ は半環を成す。和の単位元は $-\infty$ 、積の単位元は 0 である。

トロピカル演算で表される多項式をトロピカル多項式という。

1.2 プロジェクトネットワーク

プロジェクトネットワークとは、前後関係を持ったいくつかの作業の集まりのことである。各作業は、それより前の作業をすべて終えてからでないと開始できないものとする。プロジェクトネットワークは、サイクルもショートカットも持たない有向グラフとして表すことができる。ここで、有向グラフがショートカットを持たないとは、 $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ ($k \geq 2$) なる任意の path に対し、 $v_0 \rightarrow v_k$ なる arrow が存在しないこととする。

以下、プロジェクトネットワークの作業の集合を $\{1, \dots, n\}$ とする。各作業 i には非負実数 t_i が定まっているとする。 t_i を *time cost* と呼ぶ。全ての作業を終えるまでにかかる最小の時間を最短完了時間と呼ぶ。最短完了時間は、 t_1, \dots, t_n についてのトロピカル多項式で表せることが知られている。

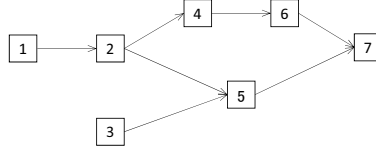


図 1: プロジェクトネットワーク

Example 1.1. 図 1 で表されるプロジェクトネットワークの最短完了時間は,

$$\begin{aligned}
 f(t_1, \dots, t_7) &= \max\{t_1 + t_2 + t_4 + t_6 + t_7, t_1 + t_2 + t_5 + t_7, t_3 + t_5 + t_7\} \\
 &= (t_1 \otimes t_2 \otimes t_4 \otimes t_6 \otimes t_7) \oplus (t_1 \otimes t_2 \otimes t_5 \otimes t_7) \oplus (t_3 \otimes t_5 \otimes t_7)
 \end{aligned}$$

となる.

1.3 R 多項式

プロジェクトネットワークの最短完了時間として実現できるトロピカル多項式を R 多項式 (realizable polynomial) という. 次の性質は, 定義からすぐに導かれる.

Proposition 1.2. R 多項式は, 以下の (1)-(3) を満たす:

- (1) 各項の係数は 0 (i.e. 積の単位元),
- (2) 各変数について 1 次式,
- (3) どの項も他の項を割り切らない.

しかし, あるトロピカル多項式が (1)-(3) を満たしていても, それが R 多項式であるとは限らない. (1)-(3) を満たすトロピカル多項式を, P 多項式 (prerealizable polynomial) と呼ぶ. 例えば, $(t_1 \otimes t_2) \oplus (t_2 \otimes t_3) \oplus (t_3 \otimes t_1)$ は P 多項式であるが R 多項式でないことが示される.

2 結果

この説では, 通常の演算記号でトロピカル演算を表す.

本研究では, 与えられた P 多項式が R 多項式となるための条件について調べ, まず以下の必要条件を得た.

Proposition 2.1. R 多項式 $f(t) = f(t_1, \dots, t_n)$ は, *term extendability* と呼ばれる以下の性質を持つ: $\{1, \dots, n\}$ の任意の部分集合 $I = \{i_1, \dots, i_{|I|}\}$ に対し, 「どの $i_k, i_l \in I$ についても, ある $f(t)$ の項が存在して $t_{i_k} t_{i_l}$ で割り切れるならば, $t_{i_1} \cdots t_{i_{|I|}}$ で割り切れる $f(t)$ の項が存在する。」が成り立つ.

そこで, *term extendability* を持つトロピカル多項式に絞って R 多項式の特徴づけを調べ, 以下の定理を証明した.

Theorem 2.2. t_1, \dots, t_n を変数とする P 多項式で, *term extendability* を持つもの全体の集合と, $\{1, \dots, n\}$ を頂点集合とする無向単純グラフ全体の集合との間には, 全単射が存在する.

2つの単純グラフが同型であることと, 対応する2つのトロピカル多項式が変数の入れ替えを除いて一致す

ることは同値である。

対応の仕方は以下の通りである：

P 多項式 \rightarrow 単純グラフ： P 多項式 $f(t_1, \dots, t_n)$ に対し、頂点集合を $\{1, \dots, n\}$ とし、ある項が $t_i t_j$ で割り切れるとき i と j を辺で結んだグラフを対応させる。

単純グラフ $\rightarrow P$ 多項式： $\{1, \dots, n\}$ を頂点集合とする単純グラフに対し、 P 多項式

$$\sum_{I: \text{極大クリーク}} t_I \quad \left(\text{ただし, } t_I = \prod_{i \in I} t_i \right)$$

を対応させる。

ここで、一般に無向グラフのクリークとは、いくつかの頂点からなる集合であって、どの2頂点間にも辺が存在するもののことである。

Theorem 2.3. *term extendability* を持つ d 次トロピカル多項式がプロジェクトネットワークの最短完了時間として得られるための必要十分条件は、対応する単純グラフにある頂点彩色が存在して、次の条件を満たすことである：

- (0) 隣接する2頂点は、色が異なる、
- (1) 使用する色は c_1, \dots, c_d の d 色で、 $c_1 < \dots < c_d$ なる順序を持つ、
- (2) 3頂点 v_1, v_2, v_3 の色が c_i, c_j, c_k のとき、 v_1 と v_2 、 v_2 と v_3 が隣接し、 $c_i < c_j < c_k$ ならば、 v_1 と v_3 は隣接する。

Example 2.4. トロピカル多項式 $f(t) = t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3 t_4 + t_4 t_5 t_6 + t_5 t_7$ は *term extendability* を持つ。 $f(t)$ に対応する単純グラフは図2のようになる。これに対し図3のような彩色を与えると、定理2.3の条件を満たし、 $f(t)$ は R 多項式であることが分かる。実際、 $f(t)$ は図4で表されるプロジェクトネットワークの最短完了時間として実現できる。

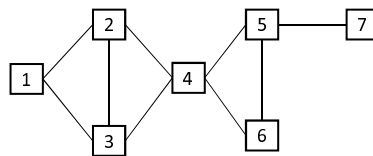


図 2

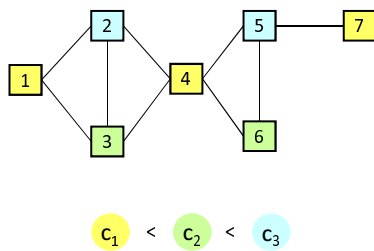


図 3

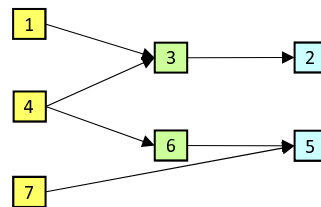


図 4

参考文献

- [1] eidergott, B., Olsder, G. J., and van der Woude, J. ,Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems: a Course on Max-plus Algebra and its Applications, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, 2005.
- [2] obayashi, M. and Odagiri, S., Tropical geometry of PERT, Journal of Math-for-Industry, Vol. 5 (2013B-8), pp. 145-149.. and Odagiri, S., Tropical geometry of PERT, Journal of Math-for-Industry, Vol. 5 (2013B-8), pp. 145-149.
- [3] ometa, E., Tanaka, A. and Takahashi, H., The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments (An invited paper in the Special Issue on COCOON 2004). Theoretical Computer Science 363, 2842 (2006).